This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Acerca de este libro

Esta es una copia digital de un libro que, durante generaciones, se ha conservado en las estanterías de una biblioteca, hasta que Google ha decidido escanearlo como parte de un proyecto que pretende que sea posible descubrir en línea libros de todo el mundo.

Ha sobrevivido tantos años como para que los derechos de autor hayan expirado y el libro pase a ser de dominio público. El que un libro sea de dominio público significa que nunca ha estado protegido por derechos de autor, o bien que el período legal de estos derechos ya ha expirado. Es posible que una misma obra sea de dominio público en unos países y, sin embargo, no lo sea en otros. Los libros de dominio público son nuestras puertas hacia el pasado, suponen un patrimonio histórico, cultural y de conocimientos que, a menudo, resulta difícil de descubrir.

Todas las anotaciones, marcas y otras señales en los márgenes que estén presentes en el volumen original aparecerán también en este archivo como testimonio del largo viaje que el libro ha recorrido desde el editor hasta la biblioteca y, finalmente, hasta usted.

Normas de uso

Google se enorgullece de poder colaborar con distintas bibliotecas para digitalizar los materiales de dominio público a fin de hacerlos accesibles a todo el mundo. Los libros de dominio público son patrimonio de todos, nosotros somos sus humildes guardianes. No obstante, se trata de un trabajo caro. Por este motivo, y para poder ofrecer este recurso, hemos tomado medidas para evitar que se produzca un abuso por parte de terceros con fines comerciales, y hemos incluido restricciones técnicas sobre las solicitudes automatizadas.

Asimismo, le pedimos que:

+ *Haga un uso exclusivamente no comercial de estos archivos* Hemos diseñado la Búsqueda de libros de Google para el uso de particulares; como tal, le pedimos que utilice estos archivos con fines personales, y no comerciales.

+ *No envíe solicitudes automatizadas* Por favor, no envíe solicitudes automatizadas de ningún tipo al sistema de Google. Si está llevando a cabo una investigación sobre traducción automática, reconocimiento óptico de caracteres u otros campos para los que resulte útil disfrutar de acceso a una gran cantidad de texto, por favor, envíenos un mensaje. Fomentamos el uso de materiales de dominio público con estos propósitos y seguro que podremos ayudarle.

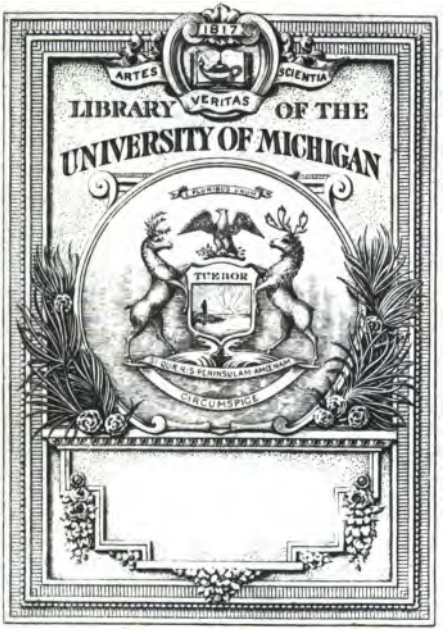
+ *Conserve la atribución* La filigrana de Google que verá en todos los archivos es fundamental para informar a los usuarios sobre este proyecto y ayudarles a encontrar materiales adicionales en la Búsqueda de libros de Google. Por favor, no la elimine.

+ *Manténgase siempre dentro de la legalidad* Sea cual sea el uso que haga de estos materiales, recuerde que es responsable de asegurarse de que todo lo que hace es legal. No dé por sentado que, por el hecho de que una obra se considere de dominio público para los usuarios de los Estados Unidos, lo será también para los usuarios de otros países. La legislación sobre derechos de autor varía de un país a otro, y no podemos facilitar información sobre si está permitido un uso específico de algún libro. Por favor, no suponga que la aparición de un libro en nuestro programa significa que se puede utilizar de igual manera en todo el mundo. La responsabilidad ante la infracción de los derechos de autor puede ser muy grave.

Acerca de la Búsqueda de libros de Google

El objetivo de Google consiste en organizar información procedente de todo el mundo y hacerla accesible y útil de forma universal. El programa de Búsqueda de libros de Google ayuda a los lectores a descubrir los libros de todo el mundo a la vez que ayuda a autores y editores a llegar a nuevas audiencias. Podrá realizar búsquedas en el texto completo de este libro en la web, en la página `http://books.google.com`

309-7


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

QA
35
.C41

LICIONES
DE MATHEMATICA,
O
ELEMENTOS GENERALES
DE ARITHMETICA,
Y
ALGEBRA
PARA EL USO DE LA CLASE,

POR EL P. THOMAS CERDA
de la Compañia de Jesvs,

Profeſſor Real de Mathematicas en Barcelona

En el Colegio de Nobles de Santiago
de Cordellas.

TOMO SEGUNDO.

CON PRIVILEGIO DEL REI NUESTRO SEÑOR.

BARCELONA.

Por FRANCISCO SURIÁ, Impreſſor de la Real Academia de Buenas Letras de dicha Ciudad. Año 1758.

Mint Committee
Wake
7-30-26
13622

LICENCIA DE LA RELIGION.

YO Jaime Dou, Prepoſito Provincial de la Compañia de Jesvs en la Provincia de Aragon, por particular comiſſion, que tengo de N. M. R. P. General Luis Centurione, doi licencia para que ſe imprima la ſegunda Parte de una Obra, cuyo titulo es: *Liciones de Mathematica*, ò *Elementos de Arithmetica, y Algebra para el uſo de la Eſcuela, compueſta por el P. Thomas Cerda, Religioſo de la dicha Compañia*, la qual Obra ha ſido viſta, y examinada por Perſonas graves, y doctas de nueſtra Religion. En teſtimonio de lo qual dí eſta, firmada de mi mano, y ſellada con el Sello mayor de mi Oficio, en eſte Colegio de Cervera à 16. de Agoſto de 1757.

Jaime Dou.

IMPRIMATUR.

Barcinone 13. Novembris 1758.

Sumalla Vic. Gen. & Offic.

LICENCIA.

EN virtud de particular Comiſſion del Conſejo doi licencia para que ſe imprima eſte Tratado de Mathematica.

Barcelona à 14. de Deciembre de 1758.

Don Juan Moreno.

ERRA-

E R R A T A S.

Paginas.	Lineas.	Dice.	Leaſe.
3	5	el	la
94	17	$-p\sqrt{az^2}$	$-p\sqrt{a \times z^2}$
94	19	$-\frac{p\sqrt{ax^2}}{a}$	$-\frac{p\sqrt{a \times x^2}}{a}$
105	2, y 10	z	y

ELEMEN-

ELEMENTOS GENERALES
DE ARITHMETICA,
Y
ALGEBRA.

PROEMIO.

N el primer Tomo de eſta Obra hemos explicado, y demonſtrado los Elementos de la Arithmetica, que contienen las Quatro Reglas fundamentales, ya en Enteros, ya en Quebrados de ambos Calculos Numerico, y Literal; aſſimiſmo con baſtante difuſion hemos tratado de la formacion de las Proporciones, Progreſſiones, Potencias, y Raices; y finalmente para mas facilitar la Multiplicacion, y Diviſion de las Quantidades Numericas, y las Operaciones que de eſtas dos dependen, hemos pueſto la Formacion, y Practica de los Logarithmos.

Sabidos pues eſtos Principios facilmente ſe logra la inteligencia de las *Equaciones*;

por cuyo medio llega el entendimiento à descubrir tales verdades, que sin este methodo no lo imaginára possible. Se reducirá pues la materia de este Tomo à la explicacion de las Equaciones *Inferiores*, y *Superiores*, manifestando su naturaleza, el numero, y calidad de sus Raices, y los diferentes methodos, de que se valen los Authores para su Resolucion, poniendo varios Problemas, cuya solucion facilita al entendimiento à manejar este grande Arte, y exercitarse en sus Reglas.

Daremos despues una suficiente noticia de las Séries, por ocurrir estas mui frequentes en las partes Superiores de la Mathematica; porque en realidad es sensible (lo que frequentemente ocurre) que omitidas muchas cosas, que se deberian tocar en los Elementos, se encuentran en las partes Superiores dificultades immensas, no tanto nacidas de lo escabroso de los Tratados, como de la falta de los Principios, que omitidos en su lugar, no es facil que lo encuentren en otra parte, y assi se ve el entendimiento sin encontrar salida à sus dificultades, y aun tal vez sin saber donde recurrir para encontrarla.

CAPI-

CAPITULO PRIMERO.

Equaciones en Comun.

1 *Equacion es una Proposicion, que afirma la igualdad de dos Quantidades, ò de dos Sumas* por medio de la señal (=) general de la Algebra para significar igualdad, el qual media entre dos partes, que se llaman *Miembros de la Equacion.* Como el fin principal de la Algebra es de unas quantidades conocidas inferir el valor de otras, que no conocemos, para distinguir unas de otras en las operaciones exprimimos las *incognitas* por las ultimas letras del Alphabeto x, u, y, z, y las conocidas por las demás a, b, c, d, &c.

2 Las Equaciones son el medio para encontrar el valor, que buscamos de las incognitas; pues *una Equacion muestra qual sea el valor de una incognita, siempre que esta se halla sola en la una parte de la Equacion, y en la otra solo hai quantidades conocidas.*

Assi si tenemos esta Equacion $x = \frac{4 \times 5}{2}$, sabremos el valor de la quantidad expressada por x, pues es igual al producto de 4 por 5, dividido por 2, que es lo mismo que 10. Por

lo tanto nueſtro fin en reſolver una Dificultad, ò Queſtion, que es *buſcar el valor, que no ſabemos, de una quantidad*, debe tirar à que dicha quantidad quede ſola, y en ſu primera Potencia en el un miembro de la Equacion, y que en el otro ſolo haya quantidades, cuyo valor conozcamos, lo que, ſino hai ſino una incognita, podremos lograr por las ſiguientes Reglas.

3 Regla 1ª. *Todo termino ſe puede paſſar del un miembro de la Equacion al otro, mudandole el ſigno de poſitivo en negativo, ò al contrario.*

Porque ſi à ſumas iguales, como ſon los miembros de la Equacion, ſe les quitan, ò añaden partes iguales, ſe quedan iguales, y quitar una quantidad del un miembro, y ponerla al otro con contrario ſigno, es *quitarla* de entrambas partes, ſi antes tenia el ſigno *poſitivo*, ò *añadirla*, ſi antes tenia el *negativo*.

Aſſi en las Equaciones ſiguientes podremos tranſponer los terminos, ò paſſar las quantidades del un miembro al otro, que es lo miſmo, mudando los ſignos, de eſta ſuerte:

$5x + 40 = 3x + 54$
$5x = 3x + 54 - 40$
$5x = 3x + 14$
$5x - 3x = 14$
$2x = 14$

$6z - 40 = 84 - 3z$
$6z = 84 + 40 - 3z$
$6z = 124 - 3z$
$6z + 3z = 124$
$9z = 124$

De

De esta Regla se sigue 1º. Que si la quantidad *incognita* está mezclada con otras conocidas, la podremos separar de ellas, poniendola sola en el un miembro, y en el otro las conocidas. 2º. Que siempre quedará igualdad en los dos miembros de la Equacion, aunque de una vez se muden los signos de todas las quantidades, ò terminos, que hai en ella, y aunque se passen del un lado al otro con contrarios signos todas las quantidades, que en él habia, poniendo en su lugar o. Assi si

$$u-3a+g=m-8 \qquad z+9-n=54$$
$$-u+3a-g=-m+8 \qquad z+9-n-54=0$$

3º. Que si una quantidad, ò sus iguales, se encuentra con un mismo signo en entrambos miembros de la Equacion, se puede borrar de entrambas partes; pues será, ò añadirla, ò quitarla de entrambos miembros: Si

$$x+b=c+b \qquad z-d=8-d \qquad y+3n=g+s$$
$$x=c \qquad z=8 \qquad s=n$$
$$y+2n=g,$$

4 Regla 2ª. *Toda quantidad, por la qual la incognita está multiplicada, se puede borrar, dividiendo por ella todos los otros terminos de entrambos miembros de la Equacion.*

Porque si sumas, ò miembros iguales se dividen por una misma quantidad, quedan iguales; y el dividir todos los terminos de la Equa-

Equacion por el coeficiente de la incognita, es dividir ambos miembros por una misma quantidad. Adviertase, que à veces el coeficiente de la incognita es un Polinomio; assi en el segundo Exemplo el coeficiente de z es el Binomio $a-1$, pues $(a-1)\times z = az-z$.

$$ax = 3+b \qquad az-z=b$$
$$\frac{ax}{a} = \frac{3+b}{a} \qquad z\times\overline{a-1}=b$$
$$x = \frac{3+b}{a} \qquad z = \frac{b}{a-1}$$

Por la misma razon si todos los terminos de una Equacion están multiplicados por una misma quantidad, ò sus iguales, se puede borrar dicha quantidad, y sus iguales, pues esto es dividir por ella entrambos miembros de la Equacion.

$$ax+5a = ac+ab \qquad ax = 3b+bd$$
$$x+5 = c+b \qquad a = b$$
$$x = c+b-5 \qquad x = 3+d$$

5 Regla 3ª. *Toda quantidad, por la qual la incognita esté dividida, se puede borrar, multiplicando todos los otros terminos de la Equacion por dicha quantidad.*

Porque si sumas, ò miembros iguales se multiplican por una misma quantidad, quedan iguales; y el multiplicar todos los terminos por el Denominador de la incognita, es

es multiplicar entrambos miembros por una misma quantidad.

$$\frac{x}{5}=a+b \qquad \frac{z}{a+b}=c \qquad \frac{y}{4}+\frac{y}{2}=8$$
$$x=5a+5b \qquad z=ac+bc \qquad 6y=64$$

Por la misma razon se pueden borrar los Denominadores, si *todos* los terminos de una Equacion están divididos por una misma quantidad, ò sus iguales.

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{a}-\frac{5}{a} \qquad \frac{x}{f}=\frac{5+b}{n}$$
$$x=b-5 \qquad f=n$$
$$x=5+b$$

En fuerza de esta Regla si en la Equacion hai alguna Fraccion, multiplicando los demás terminos por el Denominador, queda la Equacion con solos Enteros.

6 Regla 4ª. *Si la incognita de alguna Equacion está con signo Radical, se puede quitar el tal signo, haciendo primero de manera, que se encuentre sola en el un miembro de la Equacion, y todas las demás quantidades en el otro, levantando despues este miembro à Potencia del mismo Exponente, que el de la Raiz.*

Y si à mas de la incognita hai otra quantidad, que esté comprehendida baxo del mismo signo Radical, se passan todas las otras à una parte, y se borra el signo del otro miembro

bro, elevando eſte à Potencia de Exponente igual al del ſigno Radical; pues los Quadrados, los Cubos, &c. de ſumas iguales ſon tambien iguales.

$$\sqrt{x+b}=c+d \qquad \sqrt{(4x-b)}=12$$
$$\sqrt{x}=c+d-b \qquad 4x-b=12^2=144$$
$$x=(c+d-b)^2 \qquad x=\frac{144+b}{4}$$

Pero adviertaſe, que ſe dice levantando à la Potencia del miſmo Exponente el *miembro* en que eſtán las otras quantidades, y no cada termino; porque de que las ſumas de las Raices ſean iguales, no ſe infiere bien, que las ſumas de los Quadrados, de los Cubos, tambien lo ſean.

Aſſi de que $6+2=5+3$ no ſe infiere bien, $6^2+2^2=5^2+3^2$, eſto es, $36+4=25+9$; pero sí $(6+2)^2=(5+3)^2$, eſto es, $36+24+4=25+30+9=64$.

7 Regla 5ª. *Si hai dos Equaciones, ſumenſe, quitenſe, multipliquenſe, ò dividanſe los miembros de la una por los de la otra, ò por ſus multiplices, ò ſubmultiplices, quedarán dichos miembros iguales.*

Pues quantidades iguales añadidas, diſminuidas, multiplicadas, ò divididas por partes iguales ſiempre quedan iguales. Como ambos miembros de cada Equacion ſon quantidades iguales entre sí, ſumando los miembros de una Equacion con los de otra (que es ſumarlas en-

entrambas) los miembros de esta suma serán iguales; assimismo Restandolas, Multiplicandolas, Dividiéndolas, serán iguales los miembros de la Resta, &c. Si

$$x+b=d+c$$
$$m=n$$

Sumandolas $x+b+m=d+c+n$

Restandolas $x+b-m=d+c-n$

Multiplicandolas $(x+b)\,m=(d+c)\,n$

Dividiendolas $\frac{x+b}{m}=\frac{d+c}{n}$

8 Regla 6ª. *En una Equacion en lugar de una quantidad se puede substituir otra su igual, con el mismo signo, y de la misma suerte, que la otra estaba.*

Porque para la *igualdad*, lo mismo es una, que otra.

$$ax=b+c \qquad x^2=h-2r$$
$$a=b-r \qquad x=z+f$$
$$(b-r)\times x=b+c \qquad z+f=\sqrt{h-2r}$$
$$x=\frac{b+c}{b-r} \qquad z=\sqrt{h-2r}-f$$

Aplicando estas Reglas segun las circunstancias, y ocasiones lo pidan, llegarémos à conocer el valor de la incognita, encontrandose esta en el un miembro de la Equacion limpia de toda otra quantidad, y en el otro solo las conocidas, esto es resolver la Question, Equacion, ò Problema.

CAPI-

CAPITULO II.

Equaciones Simples.

9 COmo para *inferir* ſon meneſter antecedentes, y principios de que podamos ſacar legitimas conſequencias: para encontrar el valor de una quantidad incognita, ſerá meneſter, que ſe nos den circunſtancias, y propriedades tales de dicha quantidad, que de ellas deduzgamos, qual ſea ſu valor. Tales circunſtancias, y propriedades las paſſamos de la lengua al papel por medio de breves Equaciones, que las expliquen, las quales Equaciones ſon quaſi *preparatorias* para formar la Equacion principal, en cuya *ſolucion* conſiſte el encontrar el valor, que buſcamos, de la incognita. Para eſto es meneſter atender bien, *que es lo que ſe buſca, y que antecedentes, ò circunſtancias ſe nos dan para encontrarlo.*

10 Eſtos antecedentes, circunſtancias, ò condiciones comunmente ſe exprimen por Algebra, eſto es, por Equaciones proporcionadas à las condiciones dadas, de manera que los miſmos châractéres Algebraicos exprimen las circunſtancias, propriedades, ò condiciones, que ſe nos den.

Por

Por exemplo, ſean las condiciones dadas de dos incognitas x, z las ſiguientes; ſe habrán de exprimir de eſta ſuerte.

La Suma (30)	$x+z=30$
La Diferencia (4)	$x-z=4$
El Producto (221)	$xz=221$
El Quociente ($1\frac{4}{5}$)	$\frac{x}{z}=1\frac{4}{5}$
La Razon que tienen entre si (:: 3 : 4)	$x:z::3:4$

Adviertaſe, que la $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. de qualquier quantidad z, ſe exprime $\frac{z}{2}$, $\frac{z}{3}$, &c. ò bien $\frac{1}{2}z$, $\frac{1}{3}z$, &c. Ya ſe ve, que eſto ſolo ſon Exemplos, porque ſegun fueſſen las condiciones, ſe habrán de exprimir por Equaciones proporcionadas à ello.

11 Las condiciones que ſe nos dan deben ſer *ſuficientes*, para poder reſolver la Equacion, Dificultad, ò Problema, que es lo miſmo. Si con ellas podemos llegar à una Equacion final, ò à una Equacion, en que en el un miembro ſolo eſté la incognita, y en el otro ſolas quantidades conocidas, el Problema ſe llama, y es *determinado*, lo que ſucede *ſiempre que las condiciones dadas ſe exprimen à lo menos por tantas Equacioncillas, quantas incognitas entran en la Queſtion.*

12 Pero ſi las condiciones dadas no ſon ſu-

ſuficientes para llegar à una Equacion final, ò lo que es lo miſmo, para encontrar el valor de una de las incognitas es meneſter, que ſupongamos un valor conocido à la otra, el Problema es *indeterminado*, lo que ſucede *ſiempre que las Equaciones, que exprimen las condiciones, ſon menos que el numero de quantidades incognitas, cuyo valor buſcamos*; y aſſi ſemejantes Problemas ſon capaces de muchas ſoluciones.

Por exemplo. *Buſquenſe dos numeros* x, z, *cuya ſuma ſea* 30. Como para la ſolucion ſolo ſe nos da una condicion, ò Equacion, que es $x+z=30$, y ſon dos las incognitas, el Problema ſerá indeterminado.

Pues de eſta Equacion ſolo podemos inferir $x=30-z$, ò $z=30-x$, que por no ſaber determinadamente el valor de z, ni poderlo ſaber por condicion alguna dada, tampoco podremos ſaber el valor de x, de donde x tendrá tantos valores como ſe quieran dar à z; de manera, que ſi $z=10$, ſerá $x=30-z=30-10=20$; ſi $z=4$, ſerá $x=30-z=26$.

13. *Las Equaciones toman ſu nombre del Grado, ò Potencia mayor en que ſe encuentra alguna de las incognitas*, en qualquier grado, que eſtén las quantidades dadas, y conocidas. Si ninguna de ellas paſſa del primer Grado, ò Potencia, la Equacion es *Simple, Lineal*, ò del

del *Primer Grado*; ſi el mayor grado de la incognita es el ſegundo (x^2), la *Equacion es Quadrada*, ò *del Segundo Grado*; ſi es el tercero (x^3), es *Equacion Cubica*, ò *del Tercer Grado*, *&c.*

14 El *valor encontrado de la incognita* ſe llama *Raiz de la Equacion.* Aſſi en eſta $x = a + b$, la Raiz es $a + b$, y el encontrar eſta Raiz, es lo que llamamos *Reſolver el Problema.* La Raiz toma diferentes nombres, ſegun la eſpecie de quantidad ſea. Si es quantidad poſitiva, como en eſta $x = a$, la *Raiz* es *poſitiva*; ſi es quantidad negativa, como $x = -a$, es *negativa*, que tambien la llaman algunos *Raiz falſa*; ſi es quantidad imaginaria, ò impoſſible, como eſta $x = \sqrt{-a}$, ſerá *Raiz imaginaria*, ò *impoſſible*; ſi es quantidad ſorda, ò irracional, como en eſta $x = \sqrt{2}$, ſerá *Raiz ſorda.*

15 Si en el Problema, que ſe ha de reſolver, no entra mas de una incognita, que eſté en uno, ò muchos terminos de la Equacion, hemos viſto en el Capitulo antecedente, que todo el arte de reſolverla conſiſte unicamente en diſponerla, ſegun las Reglas allí dadas, de manera, que llegue à encontrarſe la incognita ſola, y limpia de ſignos Radicales, Fracciones, y Coeficientes en el un miembro de la Equacion, y en el otro las quantidades dadas, y conocidas.

16 Pero algunas veces no es tan dificultoſo el reſolver el Problema, como el formar

la Equacion: para esto ni se puede dar otra Regla, ni advertir otra cosa, sino *que la quantidad que buscamos se debe exprimir por una letra* (por exemplo x); *las circunstancias, y propriedades, que se nos dan de la dicha quantidad, por Equacioncillas, y se ha de procurar sacar de ahí una Equacion final.* El modo de practicarlo se ve en este Exemplo.

17 *Preguntado uno, qual era su edad, respondió, que si $\frac{3}{4}$ de su edad se multiplicaban por su $\frac{1}{12}$ darian un producto igual al numero de sus años. Busquese, que edad tenia.*

Lo que se busca en este Problema es una edad con las condiciones, y particularidades, que sus $\frac{3}{4}$ multiplicados por su $\frac{1}{12}$ formarán un producto igual al numero de los años que se buscan, ò igual à esta edad. Para resolver esta Question exprimase por x la edad que se busca, sus $\frac{3}{4}$ serán $\frac{3x}{4}$, y $\frac{1}{12}$ de la misma $\frac{x}{12}$; esto supuesto, por las condiciones dadas tendremos $\frac{3x}{4} \times \frac{x}{12} = x$

haciendo el producto será $\frac{3x^2}{48} = x$

reducido à menor expression $\frac{x^2}{16} = x$

multiplicando ambos por 16 $x^2 = 16x$

dividiendo por x será $x = 16.$

Pues la edad que se buscaba es de 16 años;

por-

porque siendo $x = 16$, será $\frac{3x}{4} = \frac{16 \times 3}{4} = 12$, $\frac{x}{12} = \frac{16}{12} = 1\frac{1}{3}$, y $\frac{3x}{4} \times \frac{x}{12} = 12 \times 1\frac{1}{3} = 16$, pues se verifican las condiciones del Problema.

CAPITULO III.

Tres Methodos para hacer desaparecer algunas incognitas de la Equacion.

18 SUcede algunas veces, que para la solucion de un Problema es menester formar una Equacion, en que entren dos, ò mas incognitas; pero como la Raiz de la Equacion solo se puede encontrar quando la incognita está sola en el un miembro, y en el otro solo hai quantidades conocidas, para la resolucion de semejantes Problemas se habrán de hacer desaparecer algunas de las incognitas de manera, que *solo quede una*; pues de otra suerte jamás se llegaria à una Equacion final.

Por exemplo, si en la solucion de un Problema llegamos à esta Equacion $x = 30 - z$, mientras trabajemos en ella, jamás podremos encontrar el valor de x, ni de z, pues de ninguna manera se podrá componer, que *una sola*

la incognita eſté en el un miembro de la Equacion, y que en el otro ſolo haya quantidades conocidas, con que ſerá meneſter hacer deſaparecer alguna de ellas. Para lo qual

Primer Methodo.

19 *Si en algun Problema entran dos incognitas de manera, que ambas ſe encuentren en dos Equaciones, eſcojaſe una de ellas para hacerla deſaparecer, à quien, ſuponiendo la otra como conocida, buſquenſele dos valores; pero como eſtos dos entrambos ſon valores de una miſma quantidad, ſerán iguales entre sí, por conſiguiente ſe podrá formar de ellos una Equacion, en que ya no habrá ſino una incognita, cuyo valor ſe podrá buſcar por las Reglas del Cap.* 1°. *y encontrado eſte, ſubſtituyendolo en lugar de ſu igual en una de las Equaciones, ſe tendrá tambien el valor de la otra incognita.*

20 EXEMPLO I. *Buſquenſe dos Numeros* x, z, *cuya ſuma ſea* 30, *y cuya diferencia ſea* 4.

Como en eſte Problema entran *dos* incognitas x, z, y ſon *dos* las condiciones dadas, ſe infiere, que el Problema es determinado. Pueſtas las condiciones $x+z=30$, $x-z=4$, eſcojaſe, por exemplo, x para hacerla deſaparecer, cuyos valores en las dos Equacioncillas ſerán, en la primera $x=30-z$, y en la ſegunda $x=4+z$. Tomando pues eſtos dos valo-

res

res de x, podremos formar de ellos esta Equacion $30 - z = 4 + z$; pues en esta Equacion ya no hai sino una incognita (z), à quien buscandole su valor, tendremos $z + z = 30 - 4$, $2z = 26$, $z = \frac{26}{2} = 13$. Conocido ya el valor de z, es à saber 13, para encontrar el de x substituyase el de z en una de las Equaciones de arriba, que expriman el valor de x, y tendremos $x = 4 + z = 4 + 13 = 17$.

Con que los dos numeros x, z, cuya suma es 30, y cuya diferencia es 4, son 13, y 17; pues $13 + 17 = 30$, $17 - 13 = 4$ son las condiciones del Problema.

21 EXEMPLO II. *Parte un Correo* A *de Madrid para Barcelona al mismo tiempo, que de esta Capital sale otro* B *para aquella Corte. Corre* A *con tal velocidad, que hace 5 leguas por hora; pero* B *solo camina 4. La distancia de un parage à otro es de* 100 *leguas. Buscase quanto habrá corrido cada uno quando se encuentren.*

Sea x las leguas que habrá corrido A quando encuentre à B, y las que habrá corrido este sean z, la suma de lo que habrán corrido los dos será $x + z =$ à las 100 leguas, que hai de Madrid à Barcelona. Mas la velocidad de A será à la de B, como $5 : 4$, esto es, las leguas de A à las de B, quando ambos se encuentren, como $5 : 4$; de donde la primera condicion del Problema se habrá de exprimir

por esta Proporcion $x : z :: 5 : 4$, y la segunda por esta Equacion $x + z = 100$; luego tendremos

$$x + z = 100$$

siendo $x : z :: 5 : 4$, será $4x = 5z$

dividiendo por 4 $x = \frac{5z}{4}$

quitando z de la primera $x = 100 - z$

tomando los valores de x $\frac{5z}{4} = 100 - z$

multiplicando por 4 $5z = 400 - 4z$

transponiendo $9z = 400$

dividiendo por 9. $z = 44\frac{4}{9}$

substituyendo, $x = 100 - z = 100 - 44\frac{4}{9} = 55\frac{5}{9}$

Pues se encontrarán quando A haya corrido $55\frac{5}{9}$ leguas, y B $44\frac{4}{9}$.

22 Si en el Problema hubiesse tres incognitas, se habria de proceder con un methodo semejante, haciendo desaparecer la una despues de la otra, hasta que finalmente se llegasse à una Equacion, en que no hubiesse sino una incognita.

Segundo Methodo.

23 *Si en algun Problema hubiesse dos Equaciones de unas mismas dos incognitas cada una, procurense preparar dichas Equaciones, librandolas de signos Radicales, y Fracciones, si las hubiesse. Passense en cada Equacion todas las incogni-*

cognitas à una parte, de manera que en la otra no haya ſino quantidades conocidas. Ponganſe las dos Equaciones una encima la otra, de ſuerte que la una incognita de una Equacion eſté baxo la miſma incognita en la otra.

Pueſtas aſſi las dos Equaciones, multipliqueſe cada Equacion por el coeficiente de la primera incognita de la otra (ſi eſta multiplicacion es meneſter.) *De eſtas dos multiplicaciones ſaldrán otras dos Equaciones, que ſumando los miembros de la una con los de la otra, ò bien reſtandolos, formarán una Equacion, en que no habrá ſino una incognita.*

Però es bueno advertir, que à veces eſta preparacion ſobredicha no es meneſter, ſino que tal vez tomando qualquier multiplice, ò ſubmultiplice de la una de las Equaciones, añadiendolo, ò quitandolo, multiplicandolo, ò dividiendolo por la otra, ò algun multiplice, ò ſubmultiplice ſuyo, reſultará de eſta operacion otra Equacion, en que haya ya menos incognitas, que en las otras, como ſe verá practicado en la reſolucion de Problemas de diferentes incognitas.

24 EXEMPLO I. *Quales ſon dos Numeros tales, que la ſuma del duplo del primero* (x), *y del quintuplo del ſegundo* (z) *ſea* 160, *la diferencia del quintuplo del primero al triplo del ſegundo ſea* 90.

Por las condiciones del Problema, poniendo

do las incognitas por ſu orden, tendremos

$$2x + 5z = 160$$
$$5x - 3z = 90$$

multiplicando la 1ª. por 5 $\quad 10x + 25z = 800$

multiplicando la 2ª. por 2 $\quad 10x - 6z = 180$

quitando la 4ª. de la 3ª. $\quad 31z = 620$

dividiendo por 31 $\quad z = \frac{620}{31} = 20$

luego $5x - 3z = 90$, $5x - 60 = 90$, $x = 30$.

Pues los dos numeros buſcados ſon 20, y 30.

25 EXEMPLO II. *Encontrar dos Numeros tales, que la ſuma del primero, y de la mitad del ſegundo ſea* 40, *y la diferencia entre el primero, y la mitad del ſegundo ſea* 30.

Sean los dos Numeros que ſe buſcan x, z, tendremos por las condiciones del Problema,

$$\begin{cases} x + 0.5z = 40 \\ x - 0.5z = 30 \end{cases}$$

ſumando entrambas $\quad 2x = 70$

luego $\quad x = \frac{70}{2} = 35$

y $0.5z = 40 - x = 40 - 35 = 5$, $z = \frac{5}{0.5} = 10$.

Pues los dos Numeros buſcados ſon 35, y 10.

Tercer Methodo.

26 Para entender eſte Methodo, ſacado de Maclaurin, es meneſter advertir, que *Coeficientes del miſmo orden* ſon los que eſtán en una miſma columna formada de los terminos de

de las Equaciones. Assi en el Exemplo siguiente *a*, *d*, son coeficientes de un mismo orden entre sí; *b*, *e*, y *c*, *f*, tambien lo son, estos dos ultimos son coeficientes de las incognitas elevadas à la Potencia o. Coeficientes *opuestos entre sí* son los que se toman de diferente orden, y diferente Equacion. Assi son coeficien-

Metodo 3º

Para buscar el valor de dos ó + incognitas cuentren en dos Equaciones, aprovechese del mismo modo q^l hemos dho en el 2º Metodo escojase una de las incognitas para buscarle su Valor el qual sera siempre un quebrado propio ó impropio, cuyo denominador siempre sera el producto del coeficiente de la primera incognita de la Equacion de arriba por el coeficiente de la 2ª incognita de la Equacion de abaxo— el producto del coeficiente de la primera incognita de abaxo, por el de la 2ª incognita de la Equacion de arriba, y este Denominador y comun al valor de qualquiera de las incognitas.

Para formar el numerador de la 1ª incognita: siempre es el producto del coeficiente de la 2ª incognita de la Equacion de abaxo por la cantidad del otro lado de

$af - aey$; de donde transponiendo, $aey - dby = af - cd$, dividiendo por el coeficiente de y, será $y = \frac{af - cd}{ae - db}$. Con semejante operacion, ó substituyendo, se encontrará el valor de $x = \frac{ce - bf}{ae - db}$

De esta suerte se encuentra luego el valor de las incognitas.

EXEMPLO. *Encontrar dos Numeros* x, z *tales, que la suma del primero, y del doble del segundo sea* 80, *la diferencia entre el triplo del primero, y el quadruplo del segundo sea* 24.

Por las condiciones dadas tendremos

$x + 2z = 80$ de donde por este ultimo methodo será
$3x - 4z = 24$

$$z = \frac{1 \times 24 - 3 \times 80}{1 \times -4 - 3 \times 2} = \frac{-216}{-10} = 21.6$$

$$x = \frac{80 \times -4 - 2 \times 24}{1 \times -4 - 3 \times 2} = \frac{-368}{-10} = 36.8.$$

Los dos numeros que tienen las circunstancias del Problema son 21.6, y 36.8.

127. Se puede usar de qualquiera de estos Methodos, pues los tres son igualmente exactos. Pero cada uno se podrá servir del que segun las circunstancias juzgare mas à proposito. El primero es mas comun; el segundo à veces mas breve, del que se sirven mui frequentemente los Ingleses; el tercero es el

mas

mas expedito de todos, pero pide mucha practica en el Calculo para no equivocarse. Estas Reglas de hacer desaparecer las incognitas son necessarias en qualquier Problema, en que entrassen dos, ò mas incognitas, pues solo se pueden llegar à conocer sus valores uno à uno, y assi se ha de procurar, que se desaparezcan las demás.

CAPITULO IV.

Equaciones del Segundo Grado.

28 SI despues de haber separado una incognita de otra (quando en la Question entran muchas) que es lo primero, que se debe procurar para la solucion del Problema, venimos à parar en una Equacion, en la qual se encuentre una sola incognita, que esté en el Segundo Grado, ò Potencia; esta Equacion se llama del *Segundo Grado*, ò *Quadratica*, y de estas hai de dos especies *Simple*, y *Afecta*.

29 La Equacion Quadrada simple es aquella, en que solo se encuentra el Quadrado de la incognita, como esta $x^2 = ab$, y su resolucion es facilissima, pues haciendo de manera, que el Quadrado de ella quede limpio de to-

da

da Fraccion, y Coeficiente en el un miembro de la Equacion, y todas las otras quantidades en el otro; *facando la Raiz Quadrada de entrambos miembros* se tendrá el valor de la incognita. Assi en la Equacion propuesta será $x = \sqrt{ab}$.

3o La Equacion del Segundo Grado *Afecta* es aquella, *en que à mas de encontrarse el Quadrado de la incognita, se encuentra tambien en otro termino la misma incognita simple multiplicada, ò dividida por otra quantidad*: como esta $x^2 - 2ax = b$. Estas Equaciones se resuelven por esta Regla universal.

Regla. 1o. *Passense todos los terminos en que se encuentre la incognita, y su Quadrado al un miembro, y al otro todos los terminos conocidos.*

2o. *Si el Quadrado de la incognita tubiesse algun coeficiente, quitesele por las Reglas dadas, de manera que el Quadrado de la incognita quede limpio.*

3o. *Añadase à entrambos miembros el Quadrado de la mitad del coeficiente de la incognita simple, ò del segundo termino, que es lo mismo, y assi será el miembro, ò lado en que se encuentre la incognita, un Quadrado perfecto.*

4o. *Saquese la Raiz Quadrada de entrambos miembros, la qual en el miembro donde está la incognita, es siempre la suma de la incognita simple, y de la mitad del coeficiente del segundo termino, si este es positivo; ò la diferencia de entram-*

trambos, ſi eſte es negativo. Si no hubieſſe coeficiente particular, ſe ſobreentiende 1.

Aſſi paſſando deſpues con ſigno contrario à la otra parte eſta mitad del coeficiente, quedará reſuelto el Problema, y ſe tendrá el valor de la incognita, pues quedará eſta ſola en el un miembro de la Equacion, y en el otro ſolas quantidades conocidas. Algunas veces el coeficiente del ſegundo termino es otra incognita, y en tal caſo ſupongaſe eſta como conocida. Si el coeficiente del ſegundo termino fueſſe un Polinomio, ſubſtituyaſe en ſu lugar el duplo de otra quantidad para mas facilitar la reſolucion del Problema.

31 Sea dada eſta Equacion $x^2 + ax + b = dc$ para reſolverla, ò lo que es lo miſmo, hayaſe de ſacar ſu Raiz. Paſſando al un miembro todas las quantidades conocidas ſerá $x^2 + ax = dc - b$; añadiendo à entrambos $\frac{a^2}{4}$ Quadrado de $\frac{1}{2}a$, mitad del coeficiente del ſegundo termino (eſto ſe llama *Completar el Quadrado*) tendremos $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = dc - b + \frac{a^2}{4}$; ſacando la Raiz Quadrada de ambos miembros ſerá $x + \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{(dc - b + \frac{a^2}{4})}$, tranſponiendo $x = \pm\sqrt{(dc - b + \frac{a^2}{4})} - \frac{1}{2}a$, valor de la incognita, ò Raiz de la Equacion.

Co-

32 Como la Raiz Quadrada de una *quantidad positiva* puede ser quantidad positiva, ò negativa, pues assi $a \times a$, como $-a \times -a$ dan por Quadrado a^2; por esso sacando la Raiz, en el miembro; en que solo hai quantidades conocidas hemos pueſto $\pm$, que es decir $x + \frac{1}{2}a = +\sqrt{(dc - b + \frac{a^2}{4})}$, ò $= -\sqrt{(dc - b + \frac{a^2}{4})}$, pues cada una de estas quantidades da por Quadrado $dc - b + \frac{a^2}{4}$. Por lo tanto toda Equacion Quadrada tiene dos Soluciones, ò dos Raices, que es lo mismo; con que dando el valor determinado à las letras, y sacando su Raiz Quadrada, ò exactamente, ò por aproximacion, si fuesse Raiz Incommensurable, tendremos el valor de la incognita.

33 Como los Quadrados de qualquier quantidad positiva, ò negativa son *positivos*, la Raiz Quadrada de qualquier quantidad *negativa* será una Raiz Imaginaria, ò Imposible. Assi *siempre que completo el Quadrado del miembro donde está la incognita, la suma de todas las quantidades, ò terminos del otro miembro es una quantidad negativa*, sacando despues la Raiz de entrambos miembros, las dos de este *ultimo serán Raices Imaginarias*; por consiguiente hai algunas Equaciones del Segundo Grado, que tienen todas las Raices imposibles, en quienes no se puede encontrar

trar qual ſea el valor de la incognita, por ſer una quantidad impoſſible.

34 Por exemplo, ſea eſta Equacion $x^2 + 2ax + 3a^2 = 0$, tendremos $x^2 + 2ax = -3a^2$, completando el Quadrado, $x^2 + 2ax + a^2 = -3a^2 + a^2 = -2a^2$. Eſta es una quantidad negativa, cuyas Raices Quadradas neceſſariamente han de ſer imaginarias. Sacando pues la Raiz de entrambos miembros tendremos $x + a = \pm\sqrt{-2a^2}$; de donde finalmente $x = -a + \sqrt{-2a^2}$, $x = -a - \sqrt{-2a^2}$, entrambos valores de x, y Raices de la Equacion ſon imaginarios; porque aunque $-a$ no lo ſea, pero la ſuma, y la diferencia de dos quantidades, de las quales la una es imaginaria, es tambien imaginaria, aſſi como la ſuma, ò diferencia de dos quantidades, la una de las quales ſea incommenſurable, es tambien quantidad incommenſurable.

35 De eſto ſacamos 1º. *Que todas las Equaciones del ſegundo grado tienen dos Raices.* 2º. *Que eſtas Raices pueden ſer, ò las dos reales, ò las dos imaginarias; pero no una real, y otra imaginaria.* Porque ſi completo el Quadrado, la ſuma de las quantidades de la otra parte es *quantidad poſitiva*, entrambas Raices ſon reales; ſi es *quantidad negativa*, entrambas ſon imaginarias.

36 Una coſa hai que notar en las Equaciones del Segundo Grado, y es: *Que ſiempre* que

que el ſegundo termino, donde ſe encuentra la incognita, es negativo, el Quadrado completo de eſte miembro tiene dos Raices diferentes.

Sea eſta Equacion $y^2 - 2by = p$, completando el Quadrado ſerá $y^2 - 2by + b^2 = p + b^2$, ſacando la Raiz de entrambas partes tendremos $\left.\begin{matrix} y-b \\ b-y \end{matrix}\right\} = \sqrt{p+b^2}$, pues aſſi $y-b$, como $b-y$ dan por ſu Quadrado $y^2 - 2by + b^2$; aſſi ſerá $y = b + \sqrt{p+b^2}$, $y = b - \sqrt{p+b^2}$.

37 De la miſma ſuerte, que las Equaciones del Segundo Grado *ſe pueden reſolver todas otras Equaciones, en que entren unicamente dos diferentes Dimenſiones, ò Exponentes de la incognita tales, que el uno ſea exactamente el duplo del otro*, como eſta $x^{2m} + ax^m = b$, ſea b qualquier numero Entero, ò Quebrado. Pues el un miembro es un Quadrado incompleto, que ſe puede completar, y deſpues ſe podrá ſacar ſu Raiz Quadrada. Aſſi en eſta Equacion $y^4 + 2by^2 = m$, completando el Quadrado tendremos $y^4 + 2by^2 + b^2 = b^2 + m$, ſacando la Raiz Quadrada de entrambas partes, ſerá $y^2 + b = \sqrt{(b^2 + m)}$, tranſponiendo $y^2 = \sqrt{(m + b^2)} - b$; de donde finalmente $y = \sqrt{-b + \sqrt{m + b^2}}$.

CAPI-

CAPITULO V.

Reſolucion de algunos Problemas.

38 COmo para reſolver las Equaciones del Primero, y Segundo Grado ſon ſuficientes las Reglas haſta aquí dadas, para exercitarnos en eſtas Reglas pondré aquí algunos Problemas, repartiendolos de ſuerte, que primero eſtén los del *Primer Grado*, deſpues los del *Segundo*, finalmente otros, que no excediendo el ſegundo, tengan no obſtante diferentes incognitas, ſiendo meneſter hacerlas deſaparecer, para la reſolucion.

En eſtos Problemas lo principal en que ſe ha de reparar es el arte, y el modo de plantear las Equaciones, ſobre lo qual no pudiendoſe dar Reglas generales, ſolo el miſmo exercicio, y el cuidado en advertir methodos diferentes de diſponer las Equaciones puede lograr al entendimiento aquella expedicion, que para eſte grande Arte ſe requiere.

ARTICULO PRIMERO.

Reſuelvenſe algunos Problemas del Primer Grado.

1º PROB. I. *ENcontrar un Numero, à quien añadiendo 75, la ſuma ſea el quadrupla del tal numero.*

Sea el numero que buſcamos x, ſerá ſu quadruplo $4x$. Por la condicion del Problema $x + 75 = 4x$, tranſponiendo, $75 = 4x - x = 3x$, dividiendo por 3, $x = \frac{75}{3} = 25$; ſerá $x + 75 = 25 + 75 = 100 = 25 \times 4$; pues el Numero que ſe buſcaba es 25.

4º PROBLEMA II. *Encontrar dos Numeros, cuya ſuma ſea 42, y ſu diferencia 13.*

Sea x el *menor* numero de los que buſcamos; ſerá el *mayor* el menor, y la diferencia (13) de entrambos, eſto es, $x + 13$. Por la condicion del Problema tendremos $x + x + 13 = 42$, eſto es, $2x + 13 = 42$, tranſponiendo, $2x = 42 - 13 = 29$, dividiendo por 2, ſerá $x = \frac{29}{2} = 14.5$ el menor, y $x + 13 = 14.5 + 13 = 27.5$ el mayor; pues los dos numeros que ſe buſcaban ſon 14.5, y 27.5, cuya diferencia es 13, cuya ſuma 42.

Aquí

Aquí se puede reparar de passo un methodo, por el qual dos quantidades incognitas, *cuya diferencia se dé*, se pueden exprimir por sola una letra de las que significan incognitas, como es x. Si se quiere que x suponga por la mayor, x — la diferencia (13) será la menor; si se quiere que x suponga, ò represente la menor, x + la diferencia (13) será la mayor; y assi no nos habremos de valer de dos incognitas en semejantes Problemas.

41 PROBLEMA III. *Encontrar un Numero, cuyo* $\frac{1}{5}$ *excede su* $\frac{1}{4}$ *de* 16.

Sea el numero que buscamos x, será su tercio $\frac{x}{3}$, su quarto $\frac{x}{4}$. Por la condicion del Problema $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 16$; multiplicando por 3, tendremos $x - \frac{3x}{4} = 48$; multiplicando por 4, $4x - 3x = 192$; finalmente $x = 192$, $\frac{x}{3} = 64$, $\frac{x}{4} = 48$, $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 64 - 48 = 16$; pues el numero que tenga tales circunstancias es 192.

42 PROBLEMA IV. *Dividir el Numero* 44 *en dos partes tales, que la mayor aumentada de* 5 *sea à la menor aumentada de* 7, *como* 4 *à* 3.

Sea la parte mayor x, será la menor $44 - x$. Esta aumentada de 7, será $44 + 7 - x = 51 - x$. Por la condicion del Problema tendremos $x + 5 : 51 - x :: 4 : 3$; multiplicando extremos,

mos, y medios, $3x + 15 = 204 - 4x$, transponiendo, $7x = 189$; dividiendo por 7, será $x = \frac{189}{7} = 27$ *Parte mayor*, por consiguiente $44 - x = 17$ *Parte menor.*

43 PROBLEMA V. *Encontrar dos Numeros en la razon de 3 à 4, cuya suma sea à la suma de sus Quadrados en la razon de 7 à 50.*

Sea el menor de estos Numeros $3x$, será el mayor $4x$. Por las condiciones del Problema $3x + 4x : 9x^2 + 16x^2 :: 7 : 50$, esto es, $7x : 25x^2 :: 7 : 50$; multiplicando extremos, y medios, $25x^2 \times 7 = 7x \times 50$; dividiendo por $7x$, queda $25x = 50$; finalmente $x = \frac{50}{25} = 2$; por lo tanto $3x = 6$ *Numero menor*, $4x = 8$ *Numero mayor*, que se buscan, y $6 : 8 :: 3 : 4$, $14 : 100 :: 7 : 50$.

44 PROBLEMA VI. *Encontrar dos Numeros en la razon de 9 à 7 tales, que el Quadrado de su Suma, y el Cubo de su Diferencia sean iguales.*

Sea el Numero mayor $9x$, será el menor $7x$. Por la condicion del Problema $(16x)^2 = (2x)^3$, esto es, $16x \times 16x = 8x^3$, dividiendo por $8x^2$, será $x = 2 \times 16 = 32$; por consiguiente $9x = 9 \times 32 = 288$ será el *Numero mayor*, y el *menor* $7x = 224$.

45 PROBLEMA VII. *Encontrar dos Numeros, cuya Diferencia sea 4, y la Diferencia de sus Quadrados 120.*

Sea

Sea u el Numero menor, ſerá el mayor $u+4$, el Quadrado del menor u^2, el del mayor $u^2+8u+16$, la Diferencia de los Quadrados de entrambos $8u+16$. Por la condicion del Problema $8u+16=120$, quitando 16, ſerá $8u=104$, finalmente $u=\frac{104}{8}=13$, *Numero menor*, $u+4=17$, *Numero mayor*.

46 PROBLEMA VIII. *Dividir el Numero* 100 *en dos partes tales, que el Quadrado de ſu Diferencia exceda de* 2000 *al Quadrado del doble de la parte menor.*

Sea la menor u, ſerá la mayor $100-u$, la Diferencia de entrambas $100-2u$. Por la condicion del Problema $(100-2u)^2=(2u)^2+2000$, eſto es, $10000-400u+4u^2=4u^2+2000$, quitando $4u^2$, y tranſponiendo, ſerá $10000-2000\ (=8000)=400u$, finalmente $u=\frac{8000}{400}=20$, *Parte menor*, por conſiguiente $100-20=80$, *Parte mayor*.

47 PROBLEMA IX. *Encontrar un Numero, que dividido ya en tercias, ya en quartas partes, el Producto de las tercias entre ſí ſea igual al continuo Producto de las quartas.*

Sea el tal Numero u, ſerá el producto de las *tercias* partes $\frac{u}{3}\times\frac{u}{3}\times\frac{u}{3}=\frac{u^3}{27}$, el de las *quartas* $\frac{u}{4}\times\frac{u}{4}\times\frac{u}{4}\times\frac{u}{4}=\frac{u^4}{256}$. Siendo entram-

bos productos iguales por la condicion del Problema, será $\frac{u^4}{256} = \frac{u^3}{27}$, multiplicando por 256, y dividiendo por u^3, será $u = \frac{256}{27} = 9\frac{13}{27}$ *Numero que se buscaba*, y $\frac{1}{3}u = \frac{256}{81}$, $\frac{1}{4}u = \frac{64}{27}$

Para verificar con mas facilidad las condiciones de este Problema, se puede hacer la Operacion por Logarithmos.

48 PROBLEMA X. *Dividir el Numero 36 en tres Partes tales, que la* $\frac{1}{2}$ *de la Primera, el* $\frac{1}{3}$ *de la Segunda, y el* $\frac{1}{4}$ *de la Tercera sean iguales entre sí.*

Sea u la Parte Primera de 36 (a). Por las condiciones dadas será $\frac{u}{2} = \frac{1}{3}$ de la Segunda, por consiguiente $\frac{3u}{2}$ $(= 1.5u)$ la Segunda; siendo tambien $\frac{u}{2} = \frac{1}{4}$ de la Tercera, será esta $\frac{4u}{2} = 2u$, y assi tendrémos $u + 1.5u + 2u = a$, esto es, $4.5u = a = 36$, dividiendo por u, será $0.5u = 4$, finalmente $u = \frac{4}{0.5} = 8$, *Parte Primera*; la *Segunda* $\frac{3u}{2} = 12$, la *Tercera* $2u = 16$, y se ve, que $8 + 12 + 16 = 36$, *Numero dado.*

49 PROBLEMA XI. *Dividir el Numero 90 en quatro Partes tales, que la Primera aumentada de 5 sea igual à la Segunda disminuida de 4, à la Tercera multiplicada por 3, y à la Quarta dividida por 2.*

Sea

Sea la Primera u, será la Segunda $u+5+4=u+9$, la Tercera $\frac{u+5}{3}$, y la Quarta $(u+5)\times 2=2u+10$. Por las condiciones del Problema será $u+u+9+\frac{u+5}{3}+2u+10=90$, esto es, $4u+\frac{u+5}{3}+19=90$, transponiendo, y multiplicando por 3, será $12u+u+5=213$, finalmente $u=\frac{208}{13}=16$ *Primera Parte*, $u+9=25$ *Segunda Parte*, $\frac{u+5}{3}=7$ *Tercera Parte*, $2u+10=42$ *Quarta Parte.*

50 PROBLEMA XII. *Encontrar un Numero, cuya Raiz Quadrada sea à la Cubica en la Razon de 5 à 2.*

Sea el tal Numero y^6, será su Raiz Quadrada y^3, la Cubica y^2. Por la condicion del Problema $y^3 : y^2 :: 5 : 2$, dividiendo los terminos de la Primera Razon por y^2, y los de la Segunda por 2, será $y : 1 :: 2.5 : 1$, luego $y=2.5$, $y^2=6.25$, $y^3=15.625$; por consiguiente $y^6=244.140625$, *Numero que se buscaba.*

51 PROBLEMA XIII. *Preguntó un Niño à su Padre, que edad tenia. Respondióle este: Quatro años ha, que tu edad era $\frac{1}{4}$ de la mia, pero ahora es ya $\frac{1}{3}$. Qual es la presente edad de entrambos?*

Sea la edad presente del Niño y, será la del Padre en el mismo tiempo $3y$, la edad del

Niño quatro años antes, era $y-4$, la del Padre $4\times(y-4)=4y-16$. Por la condicion del Problema $4y-16+4=3y$, de donde transponiendo, $y=12$, *Edad presente del Niño*, $3y=36$, *Edad presente del Padre*; por consiguiente quatro años antes la del Niño era 8, la del Padre 32.

52 PROBLEMA XIV. *Un General despues de la Batalla se encuentra con la mitad de su Tropa, y* 3600 *Hombres mas aun habiles, quedandole* $\frac{1}{8}$ *de su Exercito, y* 600 *Hombres heridos, y lo restante, que es* $\frac{1}{5}$ *de su Exercito, muertos, fugitivos, ò prisioneros. De quanto constaba su Exercito? Quantos son los heridos? Quantos entre muertos, fugitivos, y prisioneros?*

Sea su Exercito y, serán los que quedan habiles $\frac{y}{2}+3600$, los heridos $\frac{y}{8}+600$, los fugitivos, prisioneros, &c. $\frac{y}{5}$. Entre todos componian todo el Exercito; luego

$$\frac{y}{2}+3600+\frac{y}{8}+600+\frac{y}{5}=y$$

$$4200+\frac{y}{2}+\frac{y}{8}+\frac{y}{5}=y$$

Reduciendo todas estas Fracciones, y sumandolas, será $4200+\frac{33y}{40}=y$, multiplicandolo todo por 40, será $168000+33y=40y$, quitando de entrambas partes $33y$, tendremos

mos $168000 = 7y$, finalmente $y = \frac{168000}{7} =$ 24000, que es el Total del Exercito.

Los que quedan habiles $\frac{y}{2} + 3600 = 15600$

los heridos $\frac{y}{8} + 600 = 3600$

los fugitivos, &c. $\frac{y}{5} = 4800$

Total del Exercito $y = 24000$

53 PROBLEMA XV. *Una Pieza de Bronce de* 100 *Pulgadas Cubicas* (a) *peſa* 505 *Onzas* (b). *El Bronce es una compoſicion de Cobre, y Eſtaño. Quantas Onzas, y quantas Pulgadas hai de cada Metal, ſuponiendo que cada Pulgada de Cobre peſa* 5.25 *Onzas, y cada Pulgada de Eſtaño* 4.25?

Sean las Onzas de Cobre y, ſerán las de Eſtaño $b - y$. Supueſto que cada Pulgada de Cobre peſa 5.25 Onzas, tendremos $5.25 : 1 :: y : \frac{y}{5.25}$ por las Pulgadas de Cobre. Y ſupueſto que cada Pulgada de Eſtaño peſa 4.25 Onzas, tendremos $4.25 : 1 :: b - y : \frac{b-y}{4.25}$ por las Pulgadas de Eſtaño.

Eſto aſſentado, por las condiciones del Problema, tendremos $\frac{y}{5.25} + \frac{b-y}{4.25} = a = 100$; luego

luego multiplicando, para quitar las Fracciones, será $4.25y + 5.25\,(b-y) = 5.25 \times 4.25a$, esto es $4.25y + 5.25b - 5.25y = 5.25 \times 4.25a$, transponiendo, será $y = 5.25b - 5.25 \times 4.25a$, substituyendo en lugar de a, y b sus valores, $y = (505 - 425) \times 5.25 = 80 \times 5.25 = 420$.

Pues las Onzas de Cobre (y), que hai en dicha Pieza son 420, y las de Estaño $b - y = 505 - 420 = 85$.

Las Pulgadas Cubicas de Cobre $\frac{y}{5.25} = \frac{420}{5.25} = 80$, y assi las de Estaño $\frac{b-y}{4.25} = \frac{505-420}{4.25} = 20$. La Pieza de Bronce $80 + 20 = 100$ Pulgadas Cubicas, segun la condicion del Problema.

Este Problema propriamente pertenece à las Reglas de Alligacion, y se puede colegir de los Exemplos allí puestos, quanto mas facil sea su resolucion por las Equaciones, que por las Reglas de Alligacion.

54 PROBLEMA XVI. *Un Caballero repartió toda su Hacienda entre sus quatro Hijos, de suerte que al Mayor le dexó la mitad de toda la Hacienda menos* 800 *Libras, al Segundo* $\frac{1}{4}$ *de ella, y* 120 *Libras mas, al Tercero la mitad de lo que dexó al Mayor, y al Quarto, ò mas pequeño* $\frac{2}{3}$ *de lo que dexó al Segundo. De quanto constaba el total de la Hacienda, y quanto dexó à cada uno?*

Sea

Sea el total de la Hacienda z, ſerá lo que dexó al Primero $\frac{z}{2} - 800$, lo que dexó al Segundo $\frac{z}{4} + 120$, lo que al Tercero $\frac{z}{4} - 400$, finalmente lo que dexó al Quarto ſerá $\frac{2z}{12} + 80$; pero la ſuma de todo eſto es la Hacienda entera, luego $\frac{z}{2} + \frac{z}{4} + \frac{z}{4} + \frac{z}{6} - 1000 = z$, y como $\frac{z}{2} + \frac{z}{4} + \frac{z}{4} = z$, quitandolo de entrambos miembros de la primera Equacion, queda $\frac{z}{6} - 1000 = 0$, de donde $z = 6000$, *Total de la Hacienda.*

Por lo tanto ſerá lo que tocó

al Mayor	$\frac{z}{2} - 800 = 2200\ l.$
al Segundo	$\frac{z}{4} + 120 = 1620\ l.$
al Tercero	$\frac{z}{4} - 400 = 1100\ l.$
al Quarto	$\frac{2z}{12} + 80 = 1080\ l.$
Total de la Hacienda	$z = 6000\ l.$

ARTI-

ARTICULO II.

Reſuelvenſe algunos Problemas del Segundo Grado.

Problemas Simples del Segundo Grado.

55 PROBL. I. ENcontrar *dos Partes de* 240 (a) *tales, que la Mayor dividida por la Menor ſea à la Menor dividida por la Mayor en la Razon de* 147 : 75.

Sea la Parte Mayor x, ſerá la Menor $a-x$. Por las condiciones del Problema, tendremos $\frac{x}{a-x} : \frac{a-x}{x} :: 147 : 75 :: 49 : 25 :: m : n$ (haciendo $m=49$, $n=25$) multiplicando extremos, y medios, ſerá $\frac{nx}{a-x} = m \times \frac{a-x}{x}$, quitando las Fracciones, y dividiendo por m, queda $\frac{n}{m}x^2 = (a-x)^2$, ſacando la Raiz de entrambos miembros, $x\sqrt{\frac{n}{m}} = a-x$, tranſponiendo, $x\sqrt{\frac{n}{m}} + x = a$, finalmente ſerá

$$x = \frac{a}{\sqrt{\frac{n}{m}}+1} = \frac{240}{\sqrt{\frac{25}{49}}+1} = \frac{240}{\frac{5}{7}+1} = 240 \times \tfrac{7}{12}$$

$= 7 \times 20 = 140$, y $a-x = 240-140 = 100$.

PRO-

56 PROBLEMA II. *Encontrar tres Numeros tales, que el Primero ſea al Segundo como* $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, *el Primero al Tercero como* $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$, *y que la Suma de ſus Quadrados ſea* 549.

Sea y el Primer Numero, para encontrar los demás tendremos $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} :: y : \frac{2y}{3}$ = Segundo Numero, $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} :: y : \frac{y}{2}$ = Tercer Numero. Por la condicion del Problema $y^2 + \left(\frac{2y}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 549$, eſto es, $y^2 + \frac{4y^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 549$, de donde quitando las Fracciones, $36y^2 + 16y^2 + 9y^2 = 61y^2 = 549 \times 36$, por conſiguiente $y^2 = \frac{549 \times 36}{61} = 36 \times 9$; finalmente ſacando la Raiz de entrambos miembros, $y = 6 \times 3 = 18$ *Primer Numero*, $\frac{2y}{3} = 12$ *Segundo Numero*, y el *Tercero* $\frac{y}{2} = 9$.

57 PROBLEMA III. *Salieron en poſta à un miſmo tiempo dos Caballeros* A, *y* B; A *de Barcelona para Zaragoza, y* B *de Zaragoza para Barcelona: Corrieron de tal ſuerte, que* A *llegó à Zaragoza* 9 *horas deſpues de haber encontrado à* B, *y* B *llegó à Barcelona* 16 *horas deſpues de haber encontrado à* A. *Buſqueſe en quanto tiempo cada uno hizo ſu viage.*

Como los dos ſalieron en un miſmo tiempo, quando ſe encontraron habian corrido igual

igual numero de horas con diferente velocidad. Sea pues x el numero de horas, que cada uno habia corrido quando ſe encontraron. Supueſto que A deſpues de haber encontrado à B, en 9 horas caminó lo que eſte habia corrido en x horas, y que B caminó en 16 horas lo que A habia corrido en x horas, tendremos $9 : x :: x : \frac{x^2}{9}$ = al tiempo, que empleó B en caminar lo que en x horas habia andado A, y ſiendo eſte tiempo 16 horas, pues es lo que tardó à llegar à Barcelona deſpues de haber encontrado à A, tendremos $\frac{1}{9}x^2 = 16$; por conſiguiente $x = \sqrt{(9 \times 16)} = 3 \times 4 = 12$, que junto à las 9 horas, que A tardó à llegar à Zaragoza deſpues de haberſe encontrado, ſerán 21 *horas*, tiempo en que A hizo ſu viage deſde Barcelona à Zaragoza, y junto à las 16, que tardó B à llegar à Barcelona deſpues de haberſe encontrado, ſerán $12 + 16 = 28$ *horas*, que empleó B deſde Zaragoza à Barcelona.

58 PROBLEMA IV. *Dividir el Numero* 100 *en dos Partes tales, que ſu Diferencia ſea à ſu Suma, como ſu Rectangulo à la Diferencia de ſus Quadrados.*

Sea a la mitad del Numero dado, y la mitad de la Diferencia de las Partes. Será la Parte mayor $a + y$, la menor $a - y$. Por la condicion del Problema, tendremos $2y : 2a ::$ $(a + y)$

$(a+y)\times(a-y):(a+y)^2-(a-y)^2$, que reducida da $y:a::a^2-y^2:4ay$, multiplicando extremos, y medios, y dividiendo por a, queda $4y^2=a^2-y^2$, finalmente $y=\sqrt{\frac{a^2}{5}}=22.36$; por consiguiente la *Parte mayor* será $a+y=72.36$, la *Parte menor* $a-y=27.64$.

En este Problema se puede reparar de passo un Methodo, por el qual, aunque busquemos dos Numeros, ò Quantidades, si tenemos su *Suma*, las podemos entrambas exprimir con una sola incognita, que exprima la *mitad de su Diferencia*; porque *la mitad de la Suma de dos Quantidades + la mitad de la Diferencia de entrambas es la Quantidad mayor, y la mitad de la Suma — la mitad de la Diferencia es la Quantidad menor.* De un modo semejante se puede discurrir, si tubiessemos dada sola la *Diferencia* de entrambas, exprimiendo la *mitad de la Suma* por una incognita.

59 PROBLEMA V. *Dada la suma* 30 (3b), *y la suma de los Quadrados* 308 (c) *de tres terminos en progression Arithmetica, encontrar los tres terminos.*

Sea la comun diferencia z. Supuesto que en la tal Progression la suma de los extremos es dupla del medio, el medio será subtriplo, ò $\frac{1}{3}$ de toda la suma, y assi el termino del medio será $b=10$, el Primero $b-z$, el Ultimo $b+z$. Por la segunda condicion $(b-z)^2+b^2+(b+z)^2=c$.

Es-

Eſto es, poniendo los Quadrados à la larga, y quitando lo que mutuamente ſe deſtruye, $3b^2+2z^2=c$, de donde $2z^2=c-3b^2$, $z^2=\frac{c-3b^2}{2}$, $z=\sqrt{\frac{c-3b^2}{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}=2$; y aſſi los tres terminos ſerán $10-2$, 10, $10+2$, eſto es, $\div$ 8 . 10 . 12.

60 PROBLEMA VI. *Dada la Suma de quatro Numeros en progreſſion Arithmetica* 56 (b), *y la Suma de ſus Quadrados* 864 (c), *encontrar tales Numeros.*

Sea la mitad de la Suma de los dos Medios $=a$, la mitad de la Diferencia $=z$, ſerán eſtos dos Medios $a-z$, $a+z$; por conſiguiente el Primero de la Progreſſion ſerá $a-3z$, el quarto $a+3z$, aſſi tendremos

$$(a-3z)+(a-z)+(a+z)+(a+3z)=b$$

$$(a-3z)^2+(a-z)^2+(a+z)^2+(a+3z)^2=c$$

quitando los terminos, que mutuamente ſe deſtruyen, ſerá $4a=b$, $4aa+20z^2=c$, de donde $a=\frac{b}{4}=14$, que ſubſtituido en la Raiz de la Segunda, tendremos $z=\sqrt{\left(\frac{c}{20}-\frac{a^2}{5}\right)}=2$; por conſiguiente el termino Primero $a-3z=8$, el Segundo $a-z=12$, el Tercero $a+z=16$, el Quarto $a+3z=20$.

De la miſma ſuerte ſe puede proceder qualquier que ſea el Numero *Par* de terminos de la Progreſſion. PRO-

61 PROBLEMA VII. *Dada la Suma* (b), *la Suma de los Quadrados* (c) *de cinco terminos en progreſſion Arithmetica, determinar la Progreſſion.*

Sea a el Termino del medio, v la comun Diferencia de la Progreſſion, ſerán los cinco terminos $a-2v$, $a-v$, a, $a+v$, $a+2v$, que procediendo como en el Problema antecedente, tendremos $5a=b$, $(a=0.2b)$, por conſiguiente $5a^2+10v^2=c$, $10v^2=c-5a^2=c-0.2b^2$, $v^2=0.1c-0.02b^2$, y $v=\sqrt{(0.1c-0.02b^2)}$. Conocida a, y la Diferencia v, ſe tiene el valor del *Primer Termino* $a-2v$, *&c.*

De la miſma ſuerte ſe puede proceder, qualquier Numero *Impar* (n) de terminos, que tenga la Progreſſion; porque la ſuma de los Quadrados de los dos terminos adjacentes al del medio, ſiempre ſerá $2\times(a^2+v^2)$, y de los otros dos immediatos à eſſos $(a-2v, a+2v)$, ſerá $2\times(a^2+4v^2)$, *&c.* por conſiguiente ſerá ſiempre $a^2+2\times(a^2+v^2)+2\times(a^2+4v^2)+2\times(a^2+9v^2)$ *&c.* $=c$, la qual Equacion, haciendo $1+4+9+16$ &c. (haſta $\frac{n-1}{2}$ terminos) $=f$, ſerá $na^2+2fv^2=c$, de donde $v=\sqrt{\left(\frac{c-na^2}{2f}\right)}$. Por lo qual conocido a, que ſiempre es $=\frac{b}{n}$, ſe conocerán todos los terminos de la Progreſſion.

Con

Con ſemejante modo de diſcurrir ſe puede reſolver el Problema, ſi en vez de darſe la ſuma de los *Quadrados*, ſe dieſſe la ſuma de los *Cubos*, de los *Biquadrados*, *&c.*

Problemas Afectos del Segundo Grado.

62 PROBLEMA VIII. *Dada la ſuma de dos Quantidades* 10 (a), *la ſuma de ſus Quadrados* 58 (b), *encontrar que Quantidades ſean.*

Sea la mayor de ellas x, ſerá la menor $a-x$ (que es la ſuma menos la mayor) ſus Quadrados ſerán x^2, $a^2-2ax+x^2$. Por las condiciones del Problema, $a^2-2ax+2x^2=b=58$, tranſponiendo, $2x^2-2ax=b-a^2$, dividiendo por 2, $x^2-ax=\frac{b-a^2}{2}$, completando el Quadrado, $x^2-ax+\frac{a^2}{4}=\frac{b-a^2}{2}+\frac{a^2}{4}=\frac{4b-4a^2+2a^2}{8}=\frac{4b-2a^2}{8}$, ſacando la Raiz de entrambas partes, $x-\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{4b-2a^2}{8}}$, $x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{4b-2a^2}{8}}=5+\sqrt{\frac{32}{8}}=5+\sqrt{4}=7$. Con que el mayor Numero de los que ſe buſcan $x=7$, el menor $a-x=3$.

63 PROBLEMA IX. *Dividir el Numero* 60 (2a) *en dos Partes tales, que ſu Producto ſea* 864 (b).

Sea la Parte mayor y, ſerá la menor $2a-y$,

el

el Producto de entrambas por la condicion del Problema $(2a - y) \times y\ (= 2ay - y^2) = b$, mudando los Signos $y^2 - 2ay = -b$, completando el Quadrado $y^2 - 2ay + a^2 = a^2 - b$, ſacando la Raiz de entrambos miembros $y - a = \sqrt{(a^2 - b)}$, finalmente $y = a + \sqrt{(a^2 - b)} = 30 + \sqrt{(900 - 864)} = 30 + \sqrt{36} = 36$, por conſiguiente $2a - y = 60 - 36 = 24$.

64 PROBLEMA X. *Dada la ſuma* 60 (2a) *de dos Numeros, y la ſuma de ſus Quadrados* 1872 (2b), *encontrar tales Numeros.*

Sea el mayor de los Numeros z, ſerá el menor $2a - z$. Por la condicion del Problema $z^2 + (2a - z)^2\ (= 2z^2 - 4az + 4a^2) = 2b$, tranſponiendo, y dividiendo por 2, $z^2 - 2az = b - 2a^2$, completando el Quadrado, $z^2 - 2az + a^2 = b - 2a^2 + a^2 = b - a^2$, ſacando la Raiz, ſerá $z - a = \sqrt{(b - a^2)}$, tranſponiendo, $z = a + \sqrt{(b - a^2)} = 30 + \sqrt{(936 - 900)} = 30 + \sqrt{36} = 36$ *Numero mayor*, por conſiguiente $60 - 36 = 24$, ſerá el *Numero menor.*

65 PROBLEMA XI. *Dividir el Numero* 60 (c) *en dos Partes tales, que la ſuma del Producto de la menor multiplicada por el Quadrado de la mayor, y del de la mayor multiplicada por el Quadrado de la menor ſea* 51840 (p).

Sea la Parte mayor x, ſerá la menor $c - x$. Por la condicion del Problema $(c - x) \times x^2 + x \times (c - x)^2 = p$, eſto es, $cx^2 - x^3 + c^2x -$

$2cx^2$

$2ex^2 + x^3 = p$, que limpiandola de terminos ſuperfluos, queda $e^2x - ex^2 = p$, mudando los Signos, $ex^2 - e^2x = -p$, dividiendo por e, ſerá $x^2 - ex = -\frac{p}{e}$, completando el Quadrado, $x^2 - ex + \frac{1}{4}e^2 = \frac{1}{4}e^2 - \frac{p}{e} = \frac{e^3 - 4p}{4e}$, $x - \frac{1}{2}e = \sqrt{\frac{e^3 - 4p}{4e}}$, $x = \frac{60}{2} + \sqrt{\frac{216000 - 207360}{240}}$ $= 30 + \sqrt{36} = 36$ *Parte mayor*, por conſiguiente $e - x = 24$ *Parte menor.*

66 PROBLEMA XII. *Dada la ſuma de dos Numeros* 20 (s), *la ſuma de ſus Cubos* 2240 (c), *encontrar dichos Numeros.*

Sea el mayor y, ſerá el menor $s - y$. Por la condicion del Problema $y^3 + (s - y)^3 = c$, eſto es, $y^3 + s^3 - 3s^2y + 3sy^2 - y^3 = c$, corrigiendo la operacion, y tranſponiendo, queda $3sy^2 - 3s^2y = c - s^3$, dividiendo por $3s$, ſerá $y^2 - sy = \frac{c}{3s} - \frac{s^2}{3}$, completando el Quadrado, &c. tendremos $y = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{c}{3s} - \frac{s^2}{12}}$ $= \frac{20}{2} + \sqrt{37\frac{1}{3} - 33\frac{1}{3}} = 12$ *Numero mayor*, por conſiguiente el *menor* ſerá 8.

67 PROBLEMA XIII. *De dos Plazas diſtantes entre ſí* 320 *Leguas* (4a), *ſalieron al miſmo tiempo en poſta dos Caballeros* A, *y* B *para encontrarſe por el camino.* A *caminaba* 8 *Leguas por dia mas que* B, *y el numero de dias, que paſſa-*

paſſaron haſta encontrarſe, es preciſamente la mitad del numero de Leguas, que B *caminaba cada dia. Quanto andubo cada uno antes de encontrarſe?*

Sea x el numero de dias deſde la partida haſta que ſe encontraron. Por la hypotheſi ſerá el numero de Leguas, que B caminaba al dia $2x$, las que andaba A ſerán $2x+8$, que multiplicadas entrambas por el numero de dias x, ſu ſuma dará lo que entrambos juntos caminaron en todo el tiempo antes de encontrarſe, ò, lo que es lo miſmo, la diſtancia de los Lugares, y aſſi tendremos $2x^2+2x^2+8x\ (=4x^2+8x)=4a$; de donde dividiendo por 4, y completando el Quadrado $x^2+2x+1=a+1=81$, $x=\sqrt{81}-1=8$ dias, que havian caminado quando ſe encontraron; por conſiguiente $2x=16$ *Leguas*, que por dia andaba B, $2x+8=24$ *Leguas*, que por dia andaba A, $2xx=128$ *Leguas*, que en todo caminó B, $2xx+8x=192$ *Leguas*, que en todo andubo A haſta encontrarſe; en fin $192+128=320$, *diſtancia* de entrambos Lugares.

68 PROBLEMA XIV. *Dos Perſonas* A, *y* B *partieron à un miſmo tiempo de un Lugar para otro diſtante* 90 *Leguas* (a); *pero* A *haciendo una Legua por dia mas, que* B, *llegó al fin de ſu viage un dia antes que* B. *Quanto por dia caminaba cada uno?*

Sea y las Leguas, que por dia caminaba A, serán las que por dia caminaba B, $y-1$, el numero de dias en que A hizo su viage $\frac{a}{y}$, el numero de dias en que B le hizo $\frac{a}{y-1}$. Por la condicion dada, será $\frac{a}{y}=\frac{a}{y-1}-1$, que reduciendolo nos dará $ay-a=ay-y^2+y$, quitando el termino comun, y mudando los signos, queda $y^2-y=a$, completando el Quadrado, &c. $y=\sqrt{(a+\frac{1}{4})}+\frac{1}{2}=9\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=10$ *Leguas*, que por dia anduvo A, por consiguiente las que hizo B, $y-1=9$.

ARTICULO III.

Resuelvense algunos Problemas de varias Incognitas.

69 PROBL. I. *ENcontrar dos Numeros, cuya suma multiplicada por el Mayor sea igual al Centuplo del Menor, y multiplicada por el Menor sea el Sesentaquadruplo del Mayor.*

Sea el mayor x, el menor y, tendremos

$$(x+y)\times x=100y$$
$$(x+y)\times y=64x$$

multiplicando entrambas Equaciones entre sí, será $xy\times(x+y)^2=6400xy$; dividiendo por yx,

yx, y sacando la Raiz, será $x+y=80$; multiplicando por x, tendremos $(x+y)\times x=80x$; por consiguiente $100y=80x$, $y=\frac{80x}{100}=\frac{4x}{5}$ de donde $x+y=x+\frac{4x}{5}=\frac{9x}{5}=80$, $x=\frac{400}{9}=44\frac{4}{9}$; por lo tanto $y=\frac{4x}{5}=\frac{400}{9}\times\frac{4}{5}=35\frac{5}{9}$.

70 PROBLEMA II. *Encontrar dos Numeros en la razon de 4 à 5, de quienes quitando respectivamente otros dos, que estén en la razon de 6 à 7, las Restas queden en la razon de 2 à 3, y la suma de estas Restas sea 20.*

Sean los dos primeros Numeros $4v$, y $5v$, los segundos $6z$, y $7z$. Por la 1ª. condicion del Problema $4v-6z:5v-7z::2:3$, por la 2ª. $9v-13z=20$. Multiplicando pues en la Proporcion extremos, y medios, tendremos $12v-18z=10v-14z$; de donde transponiendo, $v=2z$, que substituido en la penultima Equacion nos da $18z-13z(=5z)=20$, finalmente $z=\frac{20}{5}=4$, que substituido nos dará el valor de $v(=2z)=8$.

Por lo tanto los dos *primeros Numeros*, que se buscan $4v$, $5v$, serán $4\times8=32$, $5\times8=40$, que son como 4 à 5, los dos *segundos* $6z$, $7z$, serán $6\times4=24$, $7\times4=28$, que son como $6:7$, sus *Diferencias* $32-24:40-28(=8:12)::2:3$, finalmente la *Suma de estas Diferencias* $8+12=20$.

PRO-

71 PROBLEMA III. *Encontrar tres Numeros tales, que* $\frac{1}{2}$ *del Primero,* $\frac{1}{3}$ *del Segundo,* $\frac{1}{4}$ *del Tercero hagan juntos* 62. *Mas,* $\frac{1}{3}$ *del Primero,* $\frac{1}{4}$ *del Segundo,* $\frac{1}{5}$ *del Tercero juntos ſean* 47. *Finalmente,* $\frac{1}{4}$ *del Primero,* $\frac{1}{5}$ *del Segundo,* $\frac{1}{6}$ *del Tercero juntos den* 38.

Para ahorrar cifras ſean $a = 62$, $b = 47$, $c = 38$, y los tres reſpectivos Numeros ſean x, y, z. Por las condiciones del Problema tendremos

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=a \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=b \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{6}=c \end{array}\right\} \text{eſto es} \left\{\begin{array}{l} 12x+8y+6z=24a \\ 20x+15y+12z=60b \\ 30x+24y+20z=120c \end{array}\right.$$

Para que deſaparezca z, quiteſe la ſegunda Equacion del duplo de la primera, y el triplo de la tercera del quintuplo de la ſegunda, y reſultará

$$\begin{array}{l} 4x+y=48a-60b \\ 10x+3y=300b-360c \end{array}$$

Quitando la ſegunda de eſtas Equaciones del triplo de la primera, y dividiendo por z,

$x = 72a - 240b + 180c = 24$, 1r. *Num.*

luego $y\,(=48a-60b-4x)=60$, 2o. *Num.*

$z\,(=(a-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y)\times 4)=120$, 3r. *Num.*

los tres de las condiciones que ſe piden.

72 PROBLEMA IV. *Dividir el Numero* 90 (a) *en tres partes tales, que el duplo de la Primera*

mera + 40 (b), *el triplo de la Segunda* + 20 (c), *y el quadruplo de la tercera* + 10 (d) *ſean iguales entre sí.*

Sean las tres Partes, que ſe buſcan x, y, z. Por las condiciones del Problema tendremos

$$x + y + z = a$$
$$2x + b = 3y + c$$
$$2x + b = 4z + d$$

Para hacer deſaparecer con una operacion y, y z, ſumenſe en una el duodecuplo de la Primera Equacion, el quadruplo de la Segunda, y el triplo de la Tercera, y ſerá la ſuma

$$26x + 12y + 12z + 7b = 12a + 12y + 12z + 4c + 3d,$$

que borrandole los terminos comunes à entrambos miembros, y tranſponiendo $7b$, queda $26x = 12a + 4c + 3d - 7b$; finalmente $x = \frac{12a + 4c + 3d - 7b}{26} = 35$, dando ſu valor à las letras; por conſiguiente $y = \frac{2x + b - c}{3} = 30$, $z\,(= a - x - y) = 25$, las *tres Partes* de 90, que ſe buſcan.

73 PROBLEMA V. *Encontrar tres Numeros tales, que las ſumas del Primero con la mitad de los otros dos, del Segundo, y* $\frac{1}{3}$ *de los otros dos, del Tercero, y* $\frac{1}{4}$ *de los otros dos, ſean iguáles entre sí, y en qualquiera de los tres caſos hagan* 51. (a)

Sean

Sean los tres respectivos Numeros x, y, z. Por la hypothesi tendremos

$$\left.\begin{array}{l} x+\frac{y+z}{2}=a \\ y+\frac{x+z}{3}=a \\ z+\frac{x+y}{4}=a \end{array}\right\} \text{quitando las Fracciones} \left\{\begin{array}{l} 2x+y+z=2a \\ x+3y+z=3a \\ x+y+4z=4a \end{array}\right.$$

de las quales, sacando la segunda de la tercera, y la primera del doble de la segunda, quedan

$$\begin{array}{r} -2y+3z=a \\ 5y+z=4a \end{array}$$

que, quitando la primera del triplo de la segunda, dan $17y=11a$, por lo tanto, $y=\frac{11a}{17}=33$, que substituido nos da el valor de $z(=4a-5y)=39$, finalmente el de $x(=3a-3y-z)=15$, los *tres Numeros* de las condiciones, que se piden.

74 PROBLEMA VI. *Encontrar tres Numeros, cuyo producto successivamente dividido por la suma de cada dos de ellos dé por Quocientes* 200, 150, 120.

Sean los tales Numeros x, y, z. Por la condicion del Problema tendremos

$$\frac{xyz}{x+y}=200, \frac{xyz}{x+z}=150, \frac{xyz}{y+z}=120,$$

multiplicando por los Denominadores,

$xyz=200x+200y=150x+150z=120y+120z$;

las

las quales por transposicion se reducen à ser

$$\left.\begin{array}{l} 50u + 200y = 150z \\ 200u + 80y = 120z \end{array}\right\} \text{dividié-} \left\{\begin{array}{l} u + 4y = 3z \\ 5u + 2y = 3z \end{array}\right. \text{do}$$

restando la 1ª de la 2ª, y transponiendo, $y = 2u$, que substituido en la Equacion $u + 4y = 3z$, nos da $9u = 3z$, por consiguiente $z = 3u$. Substituyendo pues el valor de y, de z en la Equacion $\frac{uyz}{u+y} = 200$, tendremos $\frac{u \times 2u \times 3u}{u+2u} = 200$, esto es, $\frac{6u^3}{3u} (= 2u^2) = 200$, por lo qual $u^2 = 100$, cuya Raiz $u = 10$, que substituido da el valor de $y (= 2u) = 20$, el de $z (= 3u) = 30$.

Pues los *tres Numeros* de las condiciones del Problema son 10, 20, 30.

75 PROBLEMA VII. *Encontrar la Razon de dos Numeros, cuya Rectangulo sea igual al Quadrado de su Diferencia.*

Sea el Número menor al mayor como 1 à v, si el menor Numero es z, el mayor será vz (porque $1 : v :: z : vz$). Por la condicion del Problema $z \times vz = (vz - z)^2$, ò lo que es lo mismo $vz^2 = v^2z^2 - 2vz^2 + z^2$, dividiendo por z^2, queda $v = v^2 - 2v + 1$, transponiendo, será $v^2 - 3v = -1$, completando el Quadrado, &c. $v = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2.618$ &c.

Por lo tanto la Razon de los *dos Numeros* cuyo

cuyo Rectangulo sea igual al Quadrado de su Diferencia, será la de 2.618 &c. à 1.

76 PROBLEMA VIII. *Encontrar un Numero, de cuyo Cubo quitando* 19, *y multiplicando la Diferencia por el Cubo mismo, su Producto sea* 216.

Sea el Numero v, será su Cubo v^3, quitando 19, será $v^3 - 19$. Por la condicion del Problema $(v^3 - 19) \times v^3 = 216$, esto es, $v^6 - 19v^3 = 216$.

Esta Equacion es de aquellas de quienes diximos, que teniendo la Incognita diferentes dimensiones, y la una de ellas dupla de la otra, se puede tambien resolver como la Equacion Quadrada. No obstante para enseñar otro methodo, reduzgamos dicha Equacion al Segundo Grado.

Sea $v^3 = z$, será $v^6 = z^2$, que substituido, dará $v^6 - 19v^3 = z^2 - 19z = 216$, completando el Quadrado, $z^2 - 19z + \frac{361}{4} = 216 + \frac{361}{4} = \frac{1225}{4}$, sacando la Raiz, $z - \frac{19}{2} = \pm\sqrt{\frac{1225}{4}} = \pm\frac{35}{2}$, $z = \frac{19 \pm 35}{2} = 27$. Pero arriba $v^3 = z = 27$, luego $v = \sqrt[3]{27} = 3$.

Pues el Numero de las condiciones dadas es 3, y se ve, que $3^3 - 19 = 8$, el qual multiplicado por 3^3, será $8 \times 27 = 216$.

PRO-

77 PROBLEMA IX. *Encontrar dos Numeros, cuyo producto es* 300 (a), *pero tales, que ſi al menor ſe le añade* 10 (b), *al mayor ſe le quita* 8 (c), *el Rectangulo de eſta ſuma, y eſta Diferencia ſea preciſamente el miſmo producto* (a) *de los Numeros.*

Sea el Numero mayor v, el menor y. Tendremos por las condiciones del Problema $vy = a$, $(y + b) \times (v - c) = a$, eſto es, $vy + bv - cy - cb = a$, de quien quitando la primera Equacion, queda $bv - cy - cb = 0$; por conſiguiente $bv = cy + cb$, finalmente $v = \frac{cb + cy}{b}$; cuyo valor de v ſubſtituido en la primera Equacioncilla nos dará $\frac{bcy + cy^2}{b} = a$, de donde $y^2 + by = \frac{ab}{c}$, completando el Quadrado, &c. $y = \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + \frac{ab}{c}\right)} - \frac{b}{2} = 15$; por conſiguiente $v \left(= \frac{a}{y}\right) = \frac{300}{15} = 20$.

78 PROBLEMA X. *Encontrar quatro Numeros en proporcion Arithmetica Continua tales, que el producto de los extremos ſea* 3250 (a), *y el de los medios* 3300 (b). *Que Numeros ſerán eſtos?*

Sea el mas pequeño de ellos z, la diferencia en la Progreſſion x, ſerán los terminos $z, z + x, z + 2x, z + 3x$. Por la prime-

ra

ra condicion del Problema, tendremos $z \times (z + 3x) = z^2 + 3xz = a$, por la segunda condicion $(z + x) \times (z + 2x) = z^2 + 3xz + 2x^2 = b$. Quitando la primera Equacion de la segunda, $2x^2 = b - a$, $x^2 = \frac{b-a}{2}$, $x = \sqrt{\frac{b-a}{2}} = \sqrt{\frac{3300-3250}{2}} = 5$.

Conociendo ya el valor de x, se conoce facilmente el de z, porque $z^2 + 3xz = a$, completando el Quadrado, $z^2 + 3xz + \frac{9x^2}{4} = a + \frac{9x^2}{4}$, sacando la Raiz, $z + \frac{3x}{2} = \sqrt{\frac{4a+9x^2}{4}}$, $z = \sqrt{\frac{4a+9x^2}{4}} - \frac{3x}{2} = 57.5 - 7.5 = 50$, assi será $\div$ 50 . 55 . 60 . 65.

79 PROBLEMA XI. *Dadas la suma de los Quadrados de los dos Medios* 400 (a), *y la de los Quadrados de los Extremos* 464 (b) *de quatro Numeros, que estén en progression Arithmetica, encontrar tales Numeros.*

Sea v el Extremo menor, y la comun Diferencia de la Progression y. Serán los quatro Numeros v, $v + y$, $v + 2y$, $v + 3y$; y por las condiciones del Problema, tendremos

$$(v + y)^2 + (v + 2y)^2 = a$$
$$v^2 + (v + 3y)^2 = b$$

que puestas à la larga dan

$$2v^2 + 6vy + 5y^2 = a$$
$$2v^2 + 6vy + 9y^2 = b$$

qui-

quitando la primera de la segunda, queda $4y^2 = b - a$, por consiguiente $y = \frac{\sqrt{(b-a)}}{2} = 4$; pero en fuerza de la primera Equacion tenemos $v^2 + 3yv = \frac{a}{2} - \frac{5y^2}{2}$, luego tomando y como conocida, completando el Quadrado, &c. tendremos $v = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \frac{y^2}{4}\right)} - \frac{3y}{2} = 8$.

Siendo pues el Extremo menor 8, y la Diferencia 4, serán *los quatro terminos de la Progression Arithmetica* 8, 12, 16, 20.

80 PROBLEMA XII. *Dada la suma* (a), *y la suma de los Quadrados* (b) *de tres terminos en progression Geometrica Continua, encontrar los terminos.*

Sean los tres terminos, ò Numeros que buscamos $\therefore v, x, y$,

tendremos lo primero $v + x + y = a$

lo segundo $v^2 + x^2 + y^2 = b$

y siendo la Proporcion Continua, $yv = x^2$

Transponiendo x en la primera Equacion, será $v + y = a - x$, que quadrando, dará $v^2 + 2yv + y^2 = a^2 - 2ax + x^2$, de la qual quitando la segunda Equacion, tendremos $2yv - x^2 = a^2 - 2ax + x^2 - b$. Pero por la tercera Equacion $2x^2 = 2yv$, luego substituyendo, será $x^2 = a^2 - 2ax + x^2 - b$, que quitando x^2 de cada parte, dará $a^2 - 2ax - b = 0$, $2ax = a^2 - b$, $x = \frac{a^2 - b}{2a} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2a}$.

Su-

Suponiendo pues ya x como conocida, porque hemos encontrado ſu valor, tenemos en fuerza de la ſegunda Equacion $v^2+y^2=b-x^2$, de la qual quitando la Equacion $2yv=2x^2$, tendremos $v^2-2yv+y^2=b-3x^2$, de donde ſacando la Raiz quadrada, ſerá $v-y=\sqrt{(b-3x^2)}$.

Pero por la primera Equacion $v+y=a-x$: luego ya añadiendo, ya quitando eſta ultima Equacion de eſta penultima, tendremos para el valor de v, de y, eſtas dos Equaciones $2v=a-x+\sqrt{(b-3x^2)}$, $2y=a-x-\sqrt{(b-3x^2)}$, que divididas ambas por 2 darán $v=\frac{a-x+\sqrt{(b-3x^2)}}{2}$, $y=\frac{a-x-\sqrt{(b-3x^2)}}{2}$.

81 PROBLEMA XIII. *Dadas la ſuma de los dos menores Numeros* 20 (a), *y la de los dos mayores* 45 (b) *de quatro terminos, que eſtén en progreſſion Geometrica, encontrar tales Numeros.*

Sea t el primero, v el tercero de dicha Progreſſion, ſerá el ſegundo $a-t$, el quarto $b-v$, y los quatro terminos por ſu orden ſerán t, $a-t$, v, $b-v$.

Por la propriedad de las Progreſſiones tendremos

$$t\times(b-v)=v\times(a-t)$$
$$tv=(a-t)^2.$$

En fuerza de la primera Equacion, ſerá $v=\frac{bt}{a}$, que ſubſtituido por v en la ſegunda, que-

queda $\frac{bt^2}{a} = (a-t)^2$, cuya Raiz de entrambos miembros es $t\sqrt{\frac{b}{a}} = a-t$, de donde será $t + t\sqrt{\frac{b}{a}} = a$, dividiendo, $t = \frac{a}{1+\sqrt{\frac{b}{a}}} = 8$, *Primer termino* de la Progreſſion, el *Segundo* $a-t = 12$, el *Tercero* $v\ (= \frac{bt}{a}) = 18$, el *Quarto* $b-v = 27$.

82 PROBLEMA XIV. *Encontrar quatro Numeros en progreſſion Arithmetica, pero tales, que añadiendoſeles reſpectivamente 2, 4, 8, 15, las ſumas eſtén en progreſſion Geometrica.*

Sea t el inferior de todos, y la comun diferencia v, ſerán los quatro Numeros de la Progreſſion Arithmetica t, $t+v$, $t+2v$, $t+3v$, à quienes añadiendo reſpectivamente los Numeros del Problema, las ſumas ſerán

$$t+2,\ t+v+4,\ t+2v+8,\ t+3v+15,$$

los quales por eſtar en progreſſion Geometrica por la hypotheſi, nos darán

$$(t+2) \times (t+2v+8) = (t+v+4)^2$$
$$(t+2) \times (t+3v+15) = (t+v+4) \times (t+2v+8)$$

que hechas las multiplicaciones indicadas, y tranſponiendo, vienen à parar

$$v^2 + 4v = 2t$$
$$2v^2 + 10v + 2 = 5t$$

mul-

multiplicando la primera por 10, la segunda por 2; quedan

$$10v^2 + 40v = 20t$$
$$4v^2 + 20v + 4 = 10t$$

Viendo pues que en estos segundos miembros el uno es duplo del otro, tambien será la mitad del primero $5v^2 + 20v = 4v^2 + 20v + 4$, de donde $v^2 = 4$, $v = 2$, que substituido en la Equacion $v^2 + 4v = 2t$, dan $t = 6$, que es el *Primer termino* de la Progression Arithmetica, el *Segundo* $t + v = 8$, el *Tercero* $t + 2v = 10$, el *Quarto* $t + 3v = 12$, à quienes añadiendo los terminos del Problema, las sumas son 6+2, 8+4, 10+8, 12+16, que están en progression Geometrica.

83 PROBLEMA XV. *Dada la Suma* (s), *y el Producto* (p), *ò Rectangulo de dos Numeros, encontrar la Suma de sus Quadrados, de sus Cubos, de sus Biquadrados, &c.*

1°. Sean los Numeros u, y. Tendremos por la hypothesi $u + y = s$, $uy = p$, quadrando la primera, será $u^2 + 2yu + y^2 = s^2$, de quien quitando el duplo de la segunda, queda $u^2 + y^2 = s^2 - 2p$, *Suma de los Quadrados.*

2°. Multipliquese esta ultima Equacion por $u + y = s$, tendremos $u^3 + uy^2 + yu^2 + y^3 = s^3 - 2sp$, ò lo que es lo mismo $u^3 + uy \times (u + y) + y^3 = s^3 - 2sp$, que substituyendo p en lugar de su igual uy, s en lugar de su igual $u + y$, queda $u^3 + p \times s + y^3 = s^3 - 2sp$, que

que transponiendo da $u^3 + y^3 = s^3 - 3sp$, *Suma de los Cubos.*

3°. Multipliquese esta ultima Equacion por $u + y = s$, tendremos $u^4 + uy \times (u^2 + y^2) + y^4 = s^4 - 3s^2p$, que substituyendo $s^2 - 2p$ por su igual $u^2 + y^2$, p por uy, queda $u^4 + p \times (s^2 - 2p) + y^4 = s^4 - 3s^2p$, que transponiendo da $u^4 + y^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2$, *Suma de los Biquadrados.*

4°. Multipliquese finalmente esta ultima Equacion por $u + y = s$, tendremos $u^5 + uy \times (u^3 + y^3) + y^5 = s^5 - 4s^3p + 2sp^2$, que substituyendo por uy su igual p, por $u^3 + y^3$ su igual $s^3 - 3sp$, quedará $u^5 + p \times (s^3 - 3sp) + y^5 = s^5 - 4s^3p + 2sp^2$, que transponiendo da $u^5 + y^5 = s^5 - 5s^3p + 5sp^2$, *Suma de las Quintas Potencias.*

Viendo pues la lei de la continuacion, por la qual siempre *la Suma de las Potencias immediatas superiores se adquiere multiplicando la Suma de las Potencias antecedentes por* s, *y sacando la Suma de las precedentes multiplicada por* p, se puede sacar una Formula general para encontrar immediatamente la Suma de qualesquiera Potencias (n) de dos Numeros, ò Terminos, que será

$$u^n + y^n = s^n - ns^{n-2}p + n \times \frac{n-3}{2} s^{n-4}p^2 - n \times \frac{n-4}{2} \times \frac{n-5}{3} s^{n-6}p^3 + n \times \frac{n-5}{2} \times \frac{n-6}{3} \times \frac{n-7}{4} s^{n-8}p^4 \text{ &c.}$$

en

en la qual dando un valor qualquiera à n, s, p, ſe encontrará la Suma de qualeſquiera Potencias de qualeſquiera dos Numeros, ò Terminos u, y.

CAPITULO VI.

Formacion de las Equaciones Superiores.

84 ASSI como las Potencias ſuperiores de las quantidades ſe forman de la continua multiplicacion de las Raices, que ſon Potencias inferiores, aſſimiſmo las *Equaciones Superiores* de qualquier grado ſe pueden concebir como formadas de Equaciones inferiores multiplicadas entre sí, cuyo producto es la Equacion Superior.

Sea una incognita v, y ſus valores en Equaciones ſimples diferentes ſean a, b, c, d de manera, que $v=a, v=b, v=c, v=d$. Si hacemos paſſar todas las quantidades à una parte de ſuerte, que ſolo quede o en la otra, ſerá $v-a=0, v-b=0, v-c=0, v-d=0$. Si multiplicamos entre sí dos de eſtas Equaciones, tendremos $(v-a)\times(v-b)=v^2-av-bv+ab=0$, que es una *Equacion Quadrada*, ò del ſegundo grado. Si eſta Equacion la multiplicamos por otra, ſerá $(v-a)\times(v-b)$

$x\ (v-c) = o$, que puesta à la larga, es una *Equacion Cubica.* Si ésta Equacion Cubica la multiplicamos por otra Equacion $v - d = o$, tendremos $(v-a) \times (v-b) \times (v-c) \times (v-d) = o$, que es una *Equacion Biquadrada.*

En general *qualquier Equacion Superior se puede considerar como un producto de tantas Equaciones simples como unidades contiene el mayor Exponente de la incognita, que en dicha Equacion se encuentra,* ò lo que es lo mismo *de qualesquiera otras Equaciones inferiores, con tal, que la suma de los Exponentes mayores de la incognita misma, que en ellas se halla, sea igual al Exponente mayor de la Equacion Superior.*

Por lo tanto la Equaçion del *tercer grado* se puede concebir como formada de la multiplicacion de tres Equaciones Simples, ò de una Simple, y otra Quadrada, la Equacion del *quarto grado* como formada de quatro Simples, ò de dos Quadradas, ò de una Quadrada, y dos Simples, ò de una Simple, y otra Cubica. Pero como la Equacion Cubica es el producto de tres Simples, en substancia se reduce, que toda Equacion Superior se puede concebir como formada por la multiplicacion de tantas Equaciones simples como unidades contiene su Exponente, que es el mismo que el *mayor Exponente* de su incognita.

85 El encontrar eſtas Equaciones ſimplès, cuyo producto ſe concibe ſer la Equacion ſuperior, es lo que llamamos *Reſolver las Equaciones, y encontrar ſus Raices*, ò bien porque de eſta ſuerte la Equacion, que es un producto, ſe *reſuelve* en ſus factores, que ſon ſus *Raices*, ò bien porque en eſtas Equaciones ſimples ſe encuentran los valores de la incognita, que tambien ſe llaman *Raices de la Equacion.*

86 Pero como por la multiplicacion de unas Equaciones ſimples por otras ni ſe alteran, ni ſe mudan los valores de la incognita, ſe ſigue 1°. *Que las miſmas ſon las Raices de las Equaciones ſimples, que ſon factores, que las Raices de la Equacion compueſta, que es el producto.* 2°. *Que como qualquier Equacion ſuperior ſe compone por la multiplicacion de tantas Equaciones ſimples, quantas unidades contiene ſu Exponente, tendrá tambien tantas Raices, quantas unidades ſu Exponente contiene.* Aſſi toda Equacion Quadrada debe tener dos Raices, toda Cubica tres, toda Biquadrada quatro, &c.

87 Del conſiderar las Equaciones ſuperiòres como un producto de las Equaciones ſimples, como realmente lo ſon, nacen neceſſariamente dos coſas. 1°. Que ſiendo las Equaciones ſimples factores de las Equaciones ſuperiores, han de ſer tambien ſus *diviſo-*

res

res exactos: luego *encontrando los Diviſores Multinomios de las Equaciones ſuperiores, ſe han de encontrar las Equaciones ſimples, de que eſtán formadas, por conſiguiente ſus Raices.* 2°. *Que el valor de la incognita, ò la Raiz de la Equacion ha de ſer de tal naturaleza, que ſubſtituida en la Equacion en lugar de la incognita, han de deſaparecer todos los terminos, y reducirſe ſu ſuma à* 0.

Sea eſta Equacion Cubica $(v-a) \times (v-b) \times (v-c) = 0$, cuyas Raices ſon a, b, c. Subſtituyendo en lugar de v en la Equacion ſimple $v-a$, el valor a de la incognita, ſe reducirá dicha Equacion ſimple à eſta $a-a=0$, por conſiguiente el producto $(v-a) \times (v-b) \times (v-c)$, teniendo por uno de ſus factores ó, ſerá 0, y aſſi deſaparecerán todos los terminos. Y como ſolo ſubſtituyendo en las Equaciones ſimples en lugar de la incognita una de las tres Raices a, b, c, ſe reduce dicho producto à 0, ſolo habrá tres Raices, aſſimiſmo en la Biquadrada quatro, &c.

88 Conduce tambien mucho para diſcernir la qualidad de las Raices de una Equacion el conſiderarla como compueſta por la multiplicacion de Equaciones de diferente orden. Aſſi una Equacion Cubica, como compueſta de eſta Quadrada $v^2 - pv + q = 0$, y de eſta Simple $v-a=0$, tendrá por Raices la de la Simple (a), y las dos Raices de la Quadrada

drada $\frac{p+\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$, $\frac{p-\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$. Sea eſta Equacion Quadrada $v^2-av+b=0$, cuyas Raices ſean r, s, y eſta otra $v^2-cv+d=0$, cuyas Raices ſean p, q. Si multiplicamos entre sí eſtas Equaciones, tendremos la Biquadrada $(v^2-av+b)\times(v^2-cv+d)=0$, cuyas Raices ſerán las quatro p, q, r, s. Y ſegun eſtas quantidades ſean poſitivas, ò negativas, imaginarias, ò incommenſurables, ſerán tambien tales las Raices.

89 En la Equacion del ſegundo grado, aunque en ella no aparezca quantidad imaginaria, ò lo que es lo miſmo, ſea la ſuma quantidad abſolutamente real, ſe puede no obſtante componer, que entrambas Raices ſean imaginarias. Y como *toda Equacion ſuperior de grado par*, eſto es, *del quarto, ſexto, octavo, &c. ſe puede concebir como producto de Equaciones del ſegundo grado, aunque en ella no haya quantidad, ò termino alguno imaginario, ò ſea abſolutamente quantidad real, puede no obſtante tener todas ſus Raices imaginarias.*

90 Mas en las Equaciones del ſegundo grado, ò entrambas Raices han de ſer Reales, ò entrambas imaginarias, pero no ſe puede componer, que la una ſea Real, y la otra imaginaria; *luego tambien en las Equaciones ſuperiores de grado par el numero de Raices imaginarias (ſi acaſo las hai) ha de ſer par,*

de

de la miſma ſuerte el numero de Raices reales.

91 Las Equaciones ſuperiores de grado impar, como ſon Cubica, *de quinto*, *de ſeptimo* grado, &c. no ſe pueden concebir como formadas por el producto de ſolas Equaciones del ſegundo grado; luego *ſi en dichas Equaciones no hai quantidad alguna, ò termino imaginario, todas las Raices pueden ſer Reales, pero no todas imaginarias*; porque componiendoſe de Equaciones del ſegundo grado, cuyas Raices pueden ſer todas reales, y à lo menos de una Equacion ſimple, que en tal caſo neceſſariamente debe tener ſu Raiz real, pueden ſer todas las Raices Reales, pero no pueden ſer todas imaginarias, pues debe ſer real à lo menos la Raiz de la Equacion ſimple.

La razon de eſto ultimo es, porque ſi la Raiz de eſta Equacion ſimple fueſſe imaginaria, eſta quantidad imaginaria, compareceria ſiempre en la Equacion ſuperior, por conſiguiente ſería eſta Equacion ſuperior quantidad imaginaria, y no real, como ſe ſupone; pues aunque el producto de un numero *par* de factores imaginarios pueda ſer quantidad real, como $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$, que es real, aunque negativa, pero el producto de numero impar de factores imaginarios ha de ſer neceſſariamente quantidad imaginaria: aſſi $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a\sqrt{-a}$.

El methodo para conocer ſi las Raices de una

una Equacion ſon *Reales*, ò *Imaginarias* ſe encontrará al fin de las Equaciones ſuperiores; pero para conocer ſi las Raices Reales ſon *Poſitivas*, ò *Negativas*, y quantas haya de cada eſpecie, lo explicaremos en el Capitulo ſiguiente.

CAPITULO VII.

De los Signos de las Raices, y Coeficientes de los Terminos de las Equaciones.

92 SUpueſto pues que toda Equacion tiene tantas Raices, quantas unidades contiene el grado de que es, y que eſtas Raices, caſo que ſean Reales, pueden ſer *Poſitivas*, ò *Negativas*, hemos de procurar conocer en las Equaciones, ſi ſus Raices ſon poſitivas, ò negativas, y quantas haya de cada eſpecie. Mas las Equaciones ſe componen de terminos, en que ò ſe encuentra ſolo la incognita en algun grado, qualquiera que ſea, ò la incognita multiplicada, ò dividida por alguna quantidad conocida, ò ſolo quantidades conocidas. Eſtas quantidades conocidas, por quienes la incognita eſtá multiplicada, ſiendole ſus Coeficientes, ſe llaman tambien *Coeficientes de la Equacion.*

Mul-

93 Multiplicadas pues entre sí las Equaciones ſimples, y formadas por ellas, como factores, las Equaciones de grado ſuperior, haciendo paſſar todos los terminos à una parte, el *Primer Termino de la Equacion* es aquel, en que ſe encuentra ſolo la incognita en el *mayor grado de todos quantos en la Equacion ſe encuentren*, y de cuyo Exponente la Equacion toma el nombre. El *Segundo Termino* es aquel, en que la incognita ſe halla en el grado immediato inferior de una unidad.

El *Tercer Termino* de la Equacion es aquel, en que la incognita ſe encuentra ya en un grado immediatamente inferior al del Segundo Termino, y aſſi de los demás terminos ſi los hai. Finalmente el *Ultimo Termino* de la Equacion es aquel, en que no ſe halla incognita alguna, ò lo que es lo miſmo, el Ultimo Termino es la ſuma de todos los terminos, en que la incognita no ſe encuentra. De aquí es, *que el Numero de Terminos de qualquiera Equacion excede de una unidad al Exponente mayor de ſu incognita.*

Algunas veces ſucede, que el Coeficiente de algun termino es un Polinomio, como en eſta Equacion $x^2 - ax + bx - ab = 0$, en donde aunque parece que hai dos Segundos Terminos, no hai mas que uno, pues $-ax + bx = (b - a) \times x$. Eſtos terminos, para eſtar la *Equacion bien arreglada*, ſe ponen por ſu orden

den, comenzando deſde el Primero, y ſi en la Equacion falta alguno, ſe ſuple una eſtrellita (*) en ſu lugar.

Para tener preſentes los *Signos* de las Raices, y los *Coeficientes* de los Terminos de las Equaciones, pongo al fin de eſte Capitulo una Tabla, en que ſe manifieſta la formacion de las Equaciones, que van ſucceſſivamente reſultando por la multiplicacion de las Equaciones ſimples $z-a=0$, $z-b=0$, *&c.*

En dicha Tabla eſtán las Equaciones del 2°., 3°., 4°., 5°. grado, en quienes ſus Raices todas ſon *Poſitivas*, porque las Raices de las Equaciones ſimples, ſus factores, ſon poſitivas, pues ſiendo $z-a=0$, *&c.* será $z=a$.

94 Conſiderando pues atentamente dicha Tabla, que puede ſervir de norma para toda eſpecie de Equaciones, y examinando ſus propriedades, encontramos

1°. *Que en toda Equacion el Coeficiente del primer termino es la unidad.*

2°. *El Coeficiente del ſegundo termino es la ſuma de todas las Raices de la Equacion, teniendo mudados ſus Signos*; pues ſiendo todas las Raices poſitivas, eſtán no obſtante con el ſigno —

3°. *El Coeficiente del tercer termino es la ſuma de todos los productos, que ſe pueden formar, multiplicando todas las Raices* (a, b, c, d) *una con otra*, ò lo que es lo miſmo, *de cada dos.*

El

4°. *El Coeficiente del quarto termino es la ſuma de todos los productos, que ſe pueden formar por la multiplicacion de cada tres de las Raices entre sí, teniendo mudados ſus Signos.*

De la miſma ſuerte en los demás terminos *el Coeficiente de la incognita es la ſuma de todos los productos, que ſe pueden formar por la multiplicacion de tanto numero de Raices, como es el numero de Terminos, que le preceden.*

Finalmente *el ultimo termino es ſiempre el producto de todas las Raices con Signos contrarios multiplicadas entre sí.*

95 Eſta Tabla eſtá formada por la ſucceſſiva multiplicacion de las ſimples Equaciones $z-a=0$, $z-b=0$, en las quales las Raices todas ſon *Poſitivas.* Si ſe formaſſe otra por la multiplicacion de eſtas $z+a=0$, $z+b=0$, *&c.* en las quales las Raices ſon negativas (porque de que $z+a=0$, $z=-a$) los Coeficientes de los terminos, preſcindiendo de los Signos, ſerian los miſmos: Luego podemos ſacar por Regla general, que *en toda Equacion el Coeficiente del ſegundo termino es la ſuma de las Raices, el Coeficiente del tercero la ſuma de los productos, una con otra, &c.* como ſe ha dicho.

Por lo tanto ſi para Formula univerſal ſe toma eſta Equacion Cubica $z^3-pz^2+qz-r=0$, ſiempre la ſuma de todas las Raices ſerá $=p$, la ſuma de todos los productos de cada

da dos $= q$, y el producto de todas ellas $= r$, que todas ſon quantidades conocidas.

96 Atendiendo pues à eſtas propriedades generales de las Equaciones, que hemos dado, quando ſe nos preſente alguna para reſolverla, eſtando bien ordenada, conoceremos à primera viſta la *ſuma de todas las Raices*, pues es ſiempre igual al Coeficiente del ſegundo termino p, y de ahí es facil de inferir *la ſuma de todos los Quadrados de las miſmas Raices*, que ſiempre es $p^2 - 2q$, eſto es, *el Quadrado de la ſuma, menos el duplo del Coeficiente del tercer termino.*

Porque conſiderando, que el Quadrado de qualquier ſuma es igual à la ſuma de los Quadrados de las partes, y del duplo de los productos, que de cada dos de ellas ſe pueden hacer, pues $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, llamando la *ſuma de los Quadrados* A, p la ſuma de las Raices, q la ſuma de los productos de las partes una con otra, tendremos $p^2 = A + 2q$, de donde $A = p^2 - 2q$.

97 En orden à los *Signos de los Terminos, y de las Raices de la Equacion* atendiendo à ſu formacion vemos, que el Primer Termino ſiempre es una pura *Potencia* de la incognita (z), que ſiendo poſitiva, el Primer Termino ſiempre tendrá el ſigno +. El Segundo Termino es el producto de una Potencia de la incognita por la ſuma de las Raices mudados los

los Signos, esto es, $-a$, $-b$, que siendo quantidades negativas, será tambien el Segundo Termino *Negativo*, y tendrá el signo —. El Tercer Termino tiene por Coeficiente los productos de *dos* de estas quantidades $-a$, $-b$, *&c.* que por consiguiente es *Positivo.*

De suerte, que en dichas Equaciones los Terminos van alternando de positivo en negativo. Pero dichas Equaciones tienen todas las Raices positivas, $z=a$, $z=b$, *&c.* será pues Regla general: *Quando en una Equacion los Terminos van todos alternando de + en —, todas las Raices de dicha Equacion son Positivas.*

98 Pero si todas las Raices fuessen *Negativas*, las Equaciones simples de cuya multiplicacion la Equacion superior se formaria, serian $z+a=0$, $z+b=0$, *&c.* y siendo todos los Terminos de dichos factores positivos, tambien todos los Terminos del producto, que es la Equacion superior, serian positivos, y assi no habria alternacion alguna de Signos; luego Regla general: *Quando en alguna Equacion no se encuentra mutacion alguna de Signos de un Termino al otro, todas las Raices de dicha Equacion son Negativas.*

Finalmente *en qualquier Equacion hai tantas Raices positivas, como hai mutaciones de Signos de un Termino al otro*, esto es, *de + en —, ò de — en +, y las demás Raices son negativas:*

vas: lo que es general para qualquier genero de Equaciones, preſcindiendo de las Raices imaginarias. Eſta Regla ſe atribuye à Harriot Inglés, pero jamás haſta el preſente ninguno la ha podido probar, ſino por induccion, y experiencia univerſal de quantas Equaciones haſta el preſente ſe han examinado, en todas las quales ſe verifica.

Aſſi en la Equacion Quadrada pueden entrambas Raices ſer *Poſitivas*, como en eſta $(z-a)\times(z-b)=z^2\left.\begin{matrix}-a\\-b\end{matrix}\right\}z+ab=0$, en la qual hai dos mutaciones, pues ſiendo el Primer Termino poſitivo, el Segundo es negativo, he ahí una mutacion, y ſiendo el Segundo negativo, el Tercero es poſitivo, he ahí otra. Pueden ambas Raices ſer *Negativas*, como en eſta $(z+a)\times(z+b)=z^2\left.\begin{matrix}+a\\+b\end{matrix}\right\}z+ab=0$, en la qual no habiendo mutacion alguna, no hai tampoco Raiz alguna poſitiva: luego las dos ſon negativas.

Pueden finalmente ſer la una poſitiva, y la otra negativa, como ſe ve en eſta $(z-a)\times(z+b)=z^2\left.\begin{matrix}-a\\+b\end{matrix}\right\}z-ab=0$, en que neceſſariamente hai ſolo una mutacion. Pues ſi b es mayor que a, $b-a$ ſerá una Quantidad poſitiva, y $(+b-a)z$ ſerá un Termino poſitivo: luego ſiendo tambien el Primer Ter-

Termino positivo, y el Tercero negativo, habrá solo una mutacion, por consiguiente solo una Raiz positiva. Si b es menor que a, $b-a$ será Quantidad, y Suma negativa, con que siendo tambien el Tercer Termino negativo, no habrá sino una mutacion. Finalmente si $b=a$, $b-a=0$, $(b-a)\,z=0$, y assi faltará el Segundo Termino; de donde siendo el Primero positivo, y el Tercero negativo, habrá solo una mutacion. Pues la Regla dada es universal para qualesquiera Equaciones del segundo grado, y de la misma suerte podrá qualquiera probar en otras Equaciones de qualquier grado que sean.

99 *Si en alguna Equacion de qualquier grado* (n) *que sea, falta el Segundo Termino, deben en dicha Equacion encontrarse Raices positivas, y Raices negativas, y la suma de las positivas debe ser igual à la suma de las negativas.* Pues siendo el Segundo Termino un producto de la incognita z, ò sus Potencias por la suma de las Raices, siendo la incognita quantidad positiva, debe por consiguiente su Coeficiente ser igual à 0, y reducirse el Segundo Termino à $z^{n-1} \times 0 = 0$, pues de otra suerte no faltaria. Si la suma de las Raices es $=0$, deben sus partes mutuamente destruirse, por consiguiente ser unas positivas, y otras negativas, y la suma de las unas destruir la de las otras, lo que requiere ser entrambas sumas iguales.

Si

100 *Si alguna Equacion ſe puede exactamente dividir por la Simple incognita, ò por alguna de ſus Potencias, en la tal Equacion haì tantas Raices iguales à* 0, *como unidades contiene el Exponente de la Potencia de la incognita, por la qual Potencia la Equacion es exactamente diviſible.* Aſſi eſta Equacion $z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 6z = 0$, que es exactamente diviſible por z, tiene una Raiz $= 0$, pues dicha Equacion es igual à $(z \pm 0) \times (z^3 - 6z^2 + 11z - 6) = 0$, que es lo miſmo que eſta $z \times (z^3 - 6z^2 + 11z - 6) = 0$, la qual es exactamente diviſible por z. Y eſta $z^5 - 6z^4 + 8z^3 - 6z^2 = 0$, que ſe puede exactamente dividir por z^2, tiene dos Raices iguales à 0.

Todo lo que hemos dicho en eſte Capitulo ſirve para comprehender mejor ya los factores, ya las Raices, eſto es, ſi ſon poſitivas, ſi negativas, y quantas haya de cada eſpecie en las Equaciones. En el Capitulo ſiguiente facilitaremos la reſolucion de las Equaciones por medio de las Transformaciones.

CAPITULO VIII.

De la Transformacion de las Equaciones, y fines de esta Transformacion.

ALgunas veces se proponen las Equaciones tan enredadas en sí mismas, que ò es imposible, ò dificultosísimo el resolverlas, si antes no les damos otra forma, ò mudamos en otras, cuyas Raices *teniendo una Razon dada* con las Raices de las Equaciones propuestas, sean mas faciles de resolverse, y esta mutacion es lo que llamamos *Transformacion de Equaciones.* Pondremos solamente aquí las principales Transformaciones, que están en uso, y sirven para la practica, exponiendo algunas de sus utilidades, y fines.

Primer Genero de Transformaciones.

101 El Primer Genero de Transformaciones es aquel, por el qual *la Equacion de Raices positivas se transforma en otra de Raices del mismo valor, pero negativas, ò la de negativas en otra de Raices del mismo valor, pero positivas, mudando los Signos de los termi-*

nos

nos alternos, comenzando esta mutacion desde el segundo termino.

Las Raices de esta Equacion $y^4 - y^3 - 19y^2 + 49y - 30 = 0$ son $+1, +2, +3, -5$, las de esta otra $y^4 + y^3 - 19y^2 - 49y - 30 = 0$ son $-1, -2, -3, +5$, pues la primera es igual à esta $(y-1) \times (y-2) \times (y-3) \times (y+5) = 0$, y la segunda à esta $(y+1) \times (y+2) \times (y+3) \times (y-5) = 0$.

Pero no hai otra diferencia entre entrambas Equaciones, teniendo Raices opuestas, sino la oposicion de Signos en el *Segundo*, y *Quarto* termino, que son los alternos, comenzando desde el segundo; luego para mudar todas las Raices de una Equacion en otra que las tenga contrarias, basta mudar los Signos de dichos terminos alternos.

Segundo Genero de Transformaciones.

102 El Segundo Genero de Transformaciones *es aquel, por el qual una Equacion se transforma en otra, cuyas Raices son los Reciprocos de las Raices de la Equacion propuesta.*

El *Reciproco* de qualquier quantidad Entera, ò Fraccional, es *la unidad dividida por la tal quantidad*; assi el Reciproco de 2 es $\frac{1}{2}$, el de $\frac{3}{5}$ es $1 : \frac{3}{5} = \frac{5}{3}$, $\frac{1}{x}$ el de x, y $\frac{z}{6}$ el de $\frac{6}{z}$; pero como $\frac{z}{6} \times \frac{6}{z} = 1$, $\frac{1}{2} \times 2 = 1$, &c. de ahí es, que,

co-

como diximos, *dos quantidades ſon entre sí Reciprocas, quando el producto de entrambas es la unidad.*

Quieraſe transformar la Equacion $y^4 - y^3 - 19y^2 + 49y - 30 = 0$ (cuyas Raices ſon $+1, +2, +3, -5$) en otra, cuyas Raices ſean ſus Reciprocos $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{5}$. Subſtituyanſe en la Equacion dada $\frac{1}{x}$, y ſus Potencias correſpondientes en lugar de y, y ſus Potencias, y ſe tendrá $\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3} - \frac{19}{x^2} + \frac{49}{x} - 30 = 0$, multiplicando toda la Equación por x^4, ſerá $1 - x - 19x^2 + 49x^3 - 30x^4 = 0$, que mudados los Signos, reſulta $30x^4 - 49x^3 + 19x^2 + x - 1 = 0$, cuyas Raices ſon $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{5}$; de donde para transformar una Equacion en otra, cuyas Raices ſean los Reciprocos de las Raices de la Equacion dada:

Regla general. *Subſtituyaſe en lugar de la incognita* (y) *la unidad dividida por otra incognita* (x), *multipliqueſe la Equacion, que reſulta por la mayor Potencia* (x^4) *de la nueva incognita, y mudando en ſu producto los Signos* (ſi ſe neceſſita de ello) *reſultará otra Equacion, cuyas Raices ſerán los Reciprocos de las Raices de la Equacion propueſta.* La razon de eſto es, porque ſubſtituyendo en lugar de la incognita el Reciproco de la incognita, tambien las Raices de la nueva Equacion, que ſon iguales

à ſu incognita, han de ſer iguales à los Reciprocos de las Raices de la Equacion propueſta.

Tercer Genero de Transformaciones.

103 El Tercer Genero de Transformaciones es aquel, por el qual *una Equacion ſe transforma en otra, cuyas Raices ſean mayores, ò menores de una quantidad dada, que las Raices de la Equacion propueſta.*

Por exemplo tengo eſta Equacion $y^3 - py^2 + qy - r = 0$, y la quiero transformar en otra, cuyas Raices ſean *menores* de toda eſta quantidad e, que las Raices de la Equacion propueſta. Subſtituyo pues en lugar de la incognita (y), y ſus Potencias eſta otra incognita x, aumentada de eſta quantidad e, de ſuerte que $y = x + e$, $y^2 = (x + e)^2$. Ya ſe ve, que en la Equacion, que reſulte de eſta ſubſtitucion, ſiendo $y = x + e$, tambien el valor de y ſerá mayor, que el valor de x de toda eſta quantidad e, pero el valor de qualquier incognita es la Raiz de ſu correſpondiente Equacion; luego la nueva Equacion tendrá ſus Raices inferiores à las de la primera de toda la quantidad e, y ſerá, hecha la ſubſtitucion, la nueva Equacion la ſiguiente:

$$(A)\quad \left.\begin{array}{rrrr} x^3 + & 3ex^2 + & 3e^2x + & e^3 \\ - & px^2 - & 2pex - & pe^2 \\ & + & qx + & qe \\ & & - & r \end{array}\right\} = 0$$

De

De la inverſa de eſta operacion ſe ve, que aſſi como haciendo $y = x + e$, y ſubſtituyendo en la Equacion propueſta en lugar de y, y ſus Potencias eſta quantidad $x + e$, y ſus Potencias, ſe transforma la Equacion en otra de Raices *menores* de toda la quantidad e, tambien por lo contrario haciendo $y + e = x$, ò lo que es lo miſmo, $y = x - e$, y ſubſtituyendo en lugar de y ſu igual $x - e$, ſe transformará la Equacion propueſta en otra, cuyas Raices ſerán *mayores* de toda la quantidad e, que las Raices de la Equacion propueſta.

Haciendo pues la dicha ſubſtitucion, tendremos la nueva Equacion,

$$\left.\begin{array}{r} x^3 - 3ex^2 + 3e^2x - e^3 \\ - px^2 + 2pex - pe^2 \\ + qx - qe \\ - r \end{array}\right\} = 0$$

en la qual las Raices exceden de toda la quantidad e à las Raices de la Equacion propueſta,

$$y^3 - py^2 + qy - r = 0.$$

De eſtas dos operaciones precedentes ſe infiere la ſiguiente

Regla. *Para transformar qualquiera Equacion en otra, cuyas Raices ſean inferiores à las Raices de la Equacion propueſta, de qualquier diferencia* (e), *no hai mas que ſubſtituir en lugar de la incognita* (y) *de dicha Equacion otra incognita* (x), *aumentada de la tal quantidad, ò diferencia, eſto es,* $x + e$; *y para transformar-*

la en otra de Raices mayores de qualquier exceſſo (e), *no hai mas que ſubſtituir en la tal Equacion en lugar de la incognita* (y) *otra incognita diſminuida de la tal quantidad, eſto es*, $x - e$.

104 El principal uſo de eſte Genero de Transformaciones es *para quitar de una Equacion el ſegundo termino, ù otro de los intermedios, ſiempre que fueſſe meneſter*; ò lo que es lo miſmo, para transformar una Equacion, que tiene todos los terminos, en otra à quien le falte alguno de los dichos.

En la primera Transformacion (*A*) de la Equacion $y^3 - py^2 + qy - r = 0$ vemos, que el *ſegundo* termino es $(3e - p)x^2$, cuyo coeficiente es $3e - p$, y que dicha Transformacion reſulta de hacer $y - e = x$, ò lo que es lo miſmo, $y = x + e$. Vemos mas, que ſi dicha Equacion propueſta tubieſſe los Signos alternos mudados, ò lo que es lo miſmo, tubieſſe contrarias Raices, y fueſſe $y^3 + py^2 + qy + r = 0$, haciendo $y + e = x$, $y = x - e$, reſultaria la Transformacion

$$(B)\quad \left.\begin{array}{rrrr} x^3 & - 3ex^2 & + 3e^2x & - e^3 \\ + & px^2 & - 2pex & + pe^2 \\ & + & qx & - qe \\ & & + & r \end{array}\right\} = 0$$

en la qual el coeficiente del ſegundo termino es $-3e + p$.

105 Eſto ſupueſto, ſi $e = \frac{1}{3}p$, ſe ſigue, que

$3e-p=\frac{3p}{3}-p=0, -3e+p=-\frac{3p}{3}+p=0$, luego ſerá $(3e-p)x^2=0x^2=0$, $(-3e+p)x^2=0x^2=0$. Y aſſi en entrambas Transformaciones *A*, *B* faltará el *ſegundo termino* de la Equacion; pero la primera Transformacion (*A*) reſulta de hacer $y-e=x$, eſto es, *de añadir à la incognita de la Equacion propueſta la quantidad* e *con el Signo, que tiene el ſegundo termino en ella*, y la Transformacion *B* de hacer $y+e=x$ de la miſma ſuerte, pero entrambas Equaciones propueſtas ſon *Cubicas* con Raices opueſtas: luego para quitar el ſegundo termino de qualeſquiera Equaciones del *Tercer Grado*, tomeſe la ſiguiente

Regla. *Añadaſe à la incognita de la Equacion propueſta la tercera parte del Coeficiente del ſegundo termino con ſu proprio Signo, que en ella tiene* $(y\mp\frac{1}{3}p)$, *hagaſe eſte agregado igual à otra incognita* $(y\mp\frac{1}{3}p=x)$. *En eſte valor de la nueva incognita* x, *buſqueſe, tranſponiendo, el valor de* y, *y ſubſtituyendo en la Equacion propueſta en lugar de la incognita ſu valor, reſultará otra Equacion tambien del Tercer Grado, en que faltará el ſegundo termino.*

106 Eſta Regla ſe ve practicada, y aclarada con eſte Exemplo. Hayaſe de quitar el ſegundo termino de eſta Equacion Cubica $y^3-9y^2+26y-34=0$. Añado à la incognita de la miſma Equacion el *terçio* del Coeficiente

ciente del ſegundo termino ($\frac{9}{3}=3$) con ſu proprio Signo, que en dicha Equacion es —, y ſerá $y-3$; hago eſte agregado igual à otra incognita ($y-3=x$), buſco el valor de la incognita de la Equacion, y tengo $y=x+3$. Subſtituyendo pues en la Equacion propueſta en lugar de la incognita ſu valor, tengo otra, en que falta el ſegundo termino, y ſerá

$$\left.\begin{array}{r} x^3+9x^2+27x+27 \\ -9x^2-54x-81 \\ +26x+78 \\ -34 \end{array}\right\}=0$$

$$x^3 * -x-10=0$$

107 Eſta Regla, que hemos dado para quitar el *ſegundo* termino de las *Equaciones del Tercer Grado*, ſe puede acomodar de ſuerte, que ſea univerſal para Equaciones qualeſquiera de qualquier grado que ſean.

Sea pues la Equacion propueſta de grado indeterminado (n), y el Coeficiente del ſegundo termino con ſu proprio Signo ſea $-p$: añadiendo à la incognita (y) de la Equacion propueſta $-\frac{p}{n}$, è igualando dicho agregado à otra incognita x, tendremos $y-\frac{p}{n}=x$, $y=x+\frac{p}{n}$. Subſtituyendo pues en la Equacion propueſta en lugar de la incognita y ſu valor $x+\frac{p}{n}$, reſultará otra Equacion del miſmo gra-

grado, à quien le faltará el ſegundo termino.

108 La razon de eſto es evidente, pues ſiendo el Coeficiente del ſegundo termino la ſuma de las Raices con Signo contrario, ſiendo dicho Coeficiente con ſu Signo $-p$, ſerá la ſuma de las Raices de la Equacion $+p$; y ſupueſto que hacemos $y-\frac{p}{n}=x$, ò lo que es lo miſmo, $y=x+\frac{p}{n}$, ſe ſigue, que en la nueva Equacion, cada valor de la nueva incognita x, ſerá inferior al valor de y de toda la quantidad $\frac{p}{n}$: ſiendo pues el numero de las Raices de la Equacion n (porque hai tantas, quantas unidades contiene el Exponente de la Equacion) ſerá la ſuma de los valores de la nueva incognita x menor que la ſuma de los valores de y de toda eſta quantidad $n\times\frac{p}{n}$; pero la ſuma de todos los valores de y es $+p$; luego la ſuma de los valores de la nueva incognita x es $p-n\times\frac{p}{n}=p-p=0$, y el ſegundo termino de ſu Equacion, ſerá tambien $(p-p)x^{n-1}=0$, con que le faltará el ſegundo termino.

109 Supueſto que ſolo hemos hablado de las Equaciones de grado n, *Exponente indeterminado, è univerſal del primer termino de la Equa-*

Equacion, y que lo que ſe ha de añadir con ſu proprio Signo es $\frac{p}{n}$, Coeficiente indeterminado del ſegundo termino dividido por el Exponente del primero; para quitar el ſegundo termino de qualquier Equacion de qualquier grado que ſea

Regla general. *Dividaſe el Coeficiente del ſegundo termino por el Exponente del primero, añadaſe eſte Quociente mudandole el Signo à una nueva incognita* x, *y ſubſtituyendo en la Equacion propueſta eſte agregado, y ſus Potencias correſpondientes en lugar de la incognita de la Equacion, y ſus Potencias, reſultará otra Equacion del miſmo grado, en que faltará el ſegundo termino.*

110 Por exemplo, quieraſe quitar el ſegundo termino de eſta Equacion Quadrada $y^2 - py + q = 0$. Siendo la Equacion del *Segundo Grado*, y el ſegundo termino *negativo*, hago $y = x + \frac{1}{2}p$, y ſubſtituyendo en lugar de y ſu igual $x + \frac{1}{2}p$, tendremos eſta nueva Equacion

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 \\ -px - \frac{1}{2}p^2 \\ + q \end{array}\right\} = 0$$

$$x^2 * - \tfrac{1}{4}p^2 + q = 0.$$

Con eſte methodo ſe pueden reſolver las Equaciones del Segundo Grado, ſin haber de completar el Quadrado, pues $x^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$,

$x =$

$x = \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$; por conſiguiente $y = x + \frac{1}{2}p$ $= \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} + \frac{1}{2}p$.

Si la Equacion es del quarto grado como eſta $y^4 - py^3 + qy^2 - ry + s = 0$, ſe habrá de hacer $y = x + \frac{1}{4}p$. Si del quinto grado, $y = x \mp \frac{1}{5}p$, ſegun el ſegundo termino fueſſe poſitivo, ò negativo, y ſubſtituir por la incognita ſu valor. Eſte methodo de quitar el *ſegundo* termino de una Equacion es del todo neceſſario para reſolver las Equaciones del *Tercero*, y *Quarto Grado*, ſegun los Methodos de Cardano, y de Carteſio, como veremos.

111 El modo, y principio, en que ſe funda el quitar el *ſegundo* termino de una Equacion nos da mucha luz para quitar el *tercero*, ò qualquiera de los intermedios.

Sea eſta Equacion Cubica $y^3 - py^2 + qy - r = 0$, de quien ſe haya de quitar el tercer termino. Haciendo $x = y - e$, transformando la Equacion propueſta, tendremos la Equacion *A*, en la qual el Coeficiente del *tercer termino* es $3e^2 - 2pe + q$, que haciendolo $= 0$, ſerá una Equacion Quadrada, la qual reſolviendoſe nos dará el valor de e, y ſubſtituido eſte en la ſimple Equacion $x = y - e$ nos moſtrará la quantidad, que hemos de añadir à la nueva incognita, para que ſubſtituyendo dicho agregado en lugar de la incognita de la Equacion, reſulte otra, en que ſiendo el Coeficiente del tercer termino $= 0$, deſaparezca dicho termino.

La

La Equacion Quadrada $3e^2 - 2pe + q = 0$ nos da $e = \frac{p \pm \sqrt{(p^2 - 3q)}}{3}$, luego haciendo $x = y - \frac{p - \sqrt{(p^2 - 3q)}}{3}$, ò bien $x = y - \frac{p + \sqrt{(p^2 - 3q)}}{3}$, transponiendo, y encontrado el valor de y, si lo ſubſtituimos en la Equacion propueſta, reſultará una nueva Equacion, en la qual ſiendo el Coeficiente del tercer termino $= 0$, deſaparezca dicho termino.

La razon de eſta operacion viene à coincidir con la que dimos para quitar el ſegundo termino; pues de eſta ſuerte del Coeficiente del tercer termino, que es la ſuma de los productos de las Raices, dos à dos, ſe quita tambien igual ſuma, por conſiguiente queda $= 0$.

Si todo lo que hemos dicho haſta aquí ſirve para quitar el ſegundo termino, ò alguno de los intermedios à una Equacion, que los tiene, volviendo los paſſos, las operaciones inverſas ſervirán para darlos à una Equacion, que no los tenga, pero eſto es ya fuera los limites de Elementos.

Quarto Genero de Transformaciones.

112 El Quarto Genero de Transformaciones es aquel, *por el qual las Raices de una Equacion ſe multiplican por una quantidad dada, ò ſe transforma la Equacion en otra, cuyas Rai-*

Raices ſean iguales à las Raices de la propueſta, multiplicadas por cierta quantidad.

Hayaſe de transformar eſta Equacion $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$ en otra, cuyas Raices ſean iguales à las de la primera, *multiplicadas por la quantidad f.* Para eſto hago $fz = x$, de donde $z = \frac{x}{f}$. Subſtituyendo pues en la Equacion propueſta en lugar de z ſu valor $\frac{x}{f}$, reſultará otra, cuyas Raices ſerán iguales à las Raices de la primera multiplicadas por f, ò lo que es lo miſmo, las Raices de la primera Equacion ſerán iguales à las Raices de la ſegunda, divididas por la quantidad f.

La razon de eſta operacion es evidente, porque ſiendo las Raices de una Equacion iguales à la incognita, porque ſon ſus valores, ſi $f \times z = x$, tambien los valores de x ſon iguales à los valores de z multiplicados por f. Y aſſi haciendo la ſubſtitucion arriba dicha, ſe transformará la Equacion propueſta en eſta $\frac{x^3}{f^3} - \frac{px^2}{f^2} + \frac{qx}{f} - r = 0$, que multiplicandolo todo por f^3, tendremos $x^3 - pfx^2 + qf^2x - rf^3 = 0$, en la qual las Raices ſon iguales à las Raices de la primera multiplicadas por eſta quantidad f.

De aquí ſe ve, que para dividir las Raices de la miſma Equacion propueſta por la miſma

ma quantidad f, ſe habria de hacer $\frac{z}{f} = x$, $z = xf$, de donde ſubſtituyendo, reſultaria $x^3f^3 - px^2f^2 + qxf - r = 0$, y dividiendo todo por f^3, ſería $x^3 - \frac{px^2}{f} + \frac{qx}{f^2} - \frac{r}{f^3} = 0$, cuyas Raices ſon iguales à las Raices de la Equacion propueſta, divididas por la quantidad f.

De donde para *Multiplicar*, ò *Dividir* las Raices de una Equacion por una quantidad dada, ſe puede tomar la Regla breve. *Mudeſe la incognita de la Equacion propueſta* (z) *en otra* (x), *formeſe una Progreſſion Geometrica, cuyo primer termino ſea* 1, *y el Exponente de la Progreſſion* (1, f, f², f³, &c.) *la quantidad dada* (f), *multipliquenſe ſus terminos por ſu orden por los terminos de la Equacion, que reſulte de la mutacion de la incognita* (para multiplicar las Raices) *ò dividanſe* (para dividirlas) *y ſe tendrá una Equacion, cuyas Raices ſerán iguales à las de la propuesta multiplicadas, ò divididas por dicha quantidad.*

113 Eſte Genero de Transformaciones ſirve *para quitar el Coeficiente del primer termino de una Equacion, ſi dicho Coeficiente es diferente de la unidad.*

Sea eſta Equacion $fz^3 - pz^2 + qz - r = 0$, de la qual ſe quiera quitar el Coeficiente f del primer termino. Transformeſe dicha Equacion

cion en otra, cuyas Raices ſean iguales à las Raices de la propueſta multiplicadas por dicho Coeficiente f, haciendo $fz = x$, $z = \frac{x}{f}$, y ſubſtituyendo $\frac{x}{f}$ en lugar de z, tendremos $\frac{fx^3}{f^3} - \frac{px^2}{f^2} + \frac{qx}{f} - r = 0$, eſto es, quitando f del Numerador, y Denominador del primer termino, y multiplicando todos los terminos por f^2, ſerá $x^3 - px^2 + fqx - f^2r = 0$.

De donde ſe puede ſacar eſta Regla general. Para quitar el Coeficiente del primer termino de una Equacion, *quiteſe dicho Coeficiente, mudeſe la incognita en otra, y multipliquenſe todos los terminos, comenzando deſde el tercero, por las Potencias de dicho Coeficiente, de manera que el tercer termino ſe multiplique por la primera Potencia, ò por el Coeficiente miſmo.*

114 Eſta ultima Regla conduce mucho *para quitar las Fracciones de una Equacion*, pues multiplicando todos los terminos de la Equacion por el producto de todos los Denominadores, queda dicha Equacion ſin Fracciones, pero el primer termino tendrá Coeficiente diſtincto de la unidad. Entonces por la Regla dada, quitando el Coeficiente del primer termino, reſultará una Equacion ſin Coeficiente en el primer termino, ni Fracciones.

Sea

tren las Raices de qualquier Equacion en general, explicaremos primero *de que ſuerte una Equacion, que tiene dos, ò mas Raices iguales, ſe puede reducir à Equacion de menor grado, y en ella encontrar alguna de ſus Raices.* Para lo qual es meneſter tener bien preſente, lo que reſulta, quando transformamos una Equacion en otra, *diſminuyendo ſus Raices.*

Transformeſe como en el Capitulo antecedente eſta Equacion $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$ en otra, haciendo $x = z - e$, ò lo que es lo miſmo, $z = x + e$, y ſe tiene la nueva Equacion ſiguiente

$$\left.\begin{array}{r} x^3 + 3ex^2 + 3e^2x + e^3 \\ - px^2 - 2pex - pe^2 \\ + qx + qe \\ - r \end{array}\right\} = 0$$

118 Atiendaſe bien à eſta Equacion tranſformada, y ſe obſervará 1°. *Que el ultimo Termino*, es à ſaber $(e^3 - pe^2 + qe - r)$ es lo miſmo que la Equacion propueſta $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$, teniendo e en lugar de z.

2°. Que el Coeficiente *del penultimo Termino* $3e^2 - 2pe + q$ es la quantidad que reſulta, multiplicando cada termino de los que conſtituyen el ultimo, por el *Exponente* de e en el tal termino, y dividiendo eſte producto por e; eſto es, $\frac{3e^3}{e} - \frac{2pe^2}{e} + \frac{qe}{e} - \frac{or}{e} = 3e^2 - 2pe$

$-2pe+q$; porque siendo $e^0=1$, $r=re^0$, que multiplicado por el Exponente (o) de e, y dividido por e, será $\frac{0re^0}{e}=0$.

3º. Que el Coeficiente *del antepenultimo Termino* $3e-p$ es la quantidad que resulta, multiplicando cada termino del penultimo Coeficiente por el Exponente, que en él tiene e, dividiendo este producto por $2e$. Assi $\frac{2\times 3e^2}{2e}-\frac{2pe}{2e}+\frac{0q}{2e}=3e-p$. Lo mismo sucede en semejante transformacion de una Equacion de qualquier grado que sea.

119 Tengase tambien presente, *que siempre, y quando la incognita entra en todos los terminos, que tiene una Equacion, necessariamente à lo menos uno de sus valores, ò Raices de la Equacion es* 0. Assi en esta Equacion Cubica $z^3-pz^2+qz=0$ uno de los valores de z es $=0$. La razon de esto es, porque si la incognita entra en todos los terminos, falta el ultimo, que es unicamente el producto de todas las Raices, y el producto de todas las Raices no puede faltar, ò ser $=0$, à menos que uno de sus factores, ò lo que es lo mismo, una de las Raices sea $=0$.

De la misma suerte si faltan los dos ultimos terminos de la Equacion, ò lo que es lo mismo, si el Quadrado de la incognita (z^2) entra en todos los terminos, que la Equacion tie-

tiene, dos valores de la incognita deben ſer $= o$, como en eſta $z^3 - pz^2 = o$. Si faltan los tres ultimos terminos, ò el cubo z^3 entra en todos los que tiene, tres de las Raices deben ſer $= o$, como en eſta $z^4 - pz^3 = o$, &c. La razon de eſto es, porque faltando dos de los ultimos terminos, toda la Equacion debe ſer exactamente diviſible por z^2, que es uno de los factores de todos los terminos; y faltando los tres ultimos debe ſer diviſible por z^3, lo que es ſeñal, que la Equacion ſuperior eſtá formada por la multiplicacion de la Equacion ſimple $z - o = o$ tantas veces tomada, quantas unidades contiene el Exponente de la incognita, que entra en todos los terminos.

120 Por el contrario ſi la incognita z no entra en todos los terminos de la Equacion, ò lo que es lo miſmo, la Equacion tiene el ultimo termino, ſiendo el ultimo termino el producto de todas las Raices, ninguna de ellas puede ſer $= o$, porque à ſerlo, faltaria el ultimo termino. Si no faltan los dos ultimos terminos, por conſiguiente el quadrado de la incognita z^2 no ſe encuentra en todos los terminos de la Equacion, es impoſſible, que dos de ſus Raices ſean $= o$. Si no faltan los tres ultimos, por conſiguiente el cubo de la incognita z^3 no entra en todos los terminos, es impoſſible, que tres de ſus Raices ſean $= o$, &c.

Eſto

121 Esto presupuesto, sea una Equacion en la qual dos Raices, ò valores de la incognita z, sean iguales entre sí, y à la quantidad e, transformando dicha Equacion haciendo $x = z - e$, siendo en tal caso $z - e = 0$, será $x = 0$, y por ser dos $z - e = 0$, será $x^2 = 0$, y assi en la nueva Equacion los dos ultimos terminos deben faltar.

Sea pues la Equacion propuesta esta Cubica $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$, en la qual dos de las Raices sean iguales entre sí, y à esta quantidad e. En tal caso transformandola en otra, haciendo $x = z - e$, el ultimo termino de la nueva Equacion será $e^3 - pe^2 + qe - r$; pero por ser $z - e = 0$, será $x = 0$, y assi por deber faltar el ultimo termino, será $e^3 - pe^2 + qe - r = 0$, y como dos valores de x deben ser $= 0$, tambien el penultimo termino debe desaparecer, y ser su Coeficiente $3e^2 - 2pe + q = 0$. Pero como se supone $e = z$, luego substituyendo tendremos $3z^2 - 2pz + q = 0$. *Pues se ve, que la Equacion Cubica propuesta de la incognita z está reducida à una Quadrada, en la qual una de las Raices es igual à una de las Raices de la Cubica propuesta.*

122 Si la Equacion propuesta fuesse Biquadrada $z^4 - pz^3 + qz^2 - rz + s = 0$, que tubiesse dos Raices iguales entre sí, y à esta quantidad e, transformando dicha Equacion en otra, haciendo $x = z - e$, por con-

ſiguiente $z = x + e$, reſultará la ſiguiente Equacion

$$\left.\begin{array}{r} x^4 + 4ex^3 + 6e^2x^2 + 4e^3x + e^4 \\ - px^3 - 3pex^2 - 3pe^2x - pe^3 \\ + qx^2 + 2qex + qe^2 \\ - rx - re \\ + s \end{array}\right\} = 0$$

en la qual por deber deſaparecer tambien el penultimo termino, ſería ſu Coeficiente $4e^3 - 3pe^2 + 2qe - r = 0$, y por ſer $z = e$, ſubſtituyendo ſerá $4z^3 - 3pz^2 + 2qz - r = 0$, reduciendo de eſta ſuerte la Equacion Biquadrada à eſta ultima Cubica.

123 Pero viendo que en la nueva Equacion el ultimo termino es el miſmo que la Equacion propueſta, teniendo e en lugar de z, y que multiplicando cada uno de ſus terminos por el *Exponente* de e, que en él hai, y dividiendolo por e, ſe encuentra el Coeficiente del penultimo, dando la transformacion por preſupueſta, ſe puede immediatamente, y ſin rodeos reducir la Equacion propueſta à otra de inferior grado, que tenga una Raiz igual à una de las ſuyas por eſta Regla general.

Regla. *Multipliqueſe cada Termino de la Equacion propueſta por el Exponente de la incognita, que en él hai, dividaſe toda la Equacion por la incognita, y la Equacion que reſulte, ſerá de inferior grado, y tendrá una de*

ſus

ſus Raices igual à una de las Raices de la Equacion propueſta.

Aſſi dicha Equacion $z^4 - pz^3 + qz^2 - rz + s = 0$ ſe reducirá à eſta otra de inferior grado

$$\frac{4 \times z^4 - 3 \times pz^3 + 2 \times qz^2 - 1 \times rz + 0 \times s}{z} =$$

$$4z^3 - 3pz^2 + 2qz - r = 0.$$

124 Si en la Equacion propueſta $z^4 - pz^3 + qz^2 - rz + s = 0$ hubieſſe tres Raices iguales, haciendo la miſma operacion, y tranſformacion, en la nueva Equacion debria deſaparecer tambien el termino *antepenultimo*, por conſiguiente $6e^2 - 3pe + q = 0$, y ſupueſto que $e = z$, ſubſtituyendo ſe tendrá $6z^2 - 3pz + q = 0$, ò bien dando la transformacion por preſupueſta, reduciendo la ultima Equacion Cubica à Quadrada, ſe tendrá la ſiguiente

$$\frac{3 \times 4z^3 - 2 \times 3pz^2 + 1 \times 2qz - 0 \times r}{2z} = 6z^2 - 3pz + q = 0.$$

Y aſſi la Equacion Biquadrada ſe podrá en tal caſo reducir à eſta Quadrada.

De donde *ſi en la Equacion propueſta hai ſolo dos Raices iguales entre sí, ſe puede la tal Equacion reducir à otra de un grado inferior, ſi hubieſſe tres, ſe podrá reducir à otra inferior de dos grados, &c.* El methodo para conocer quando en una Equacion hai dos Raices iguales entre sí, ſe encontrará en Maclaurin.

CAPI-

CAPITULO X.

De los Limites de las Raices de las Equaciones.

ARTICULO PRIMERO.

De los Limites de las Raices en comun.

125 *Limites de las Raices de las Equaciones* ſon dos quantidades, entre las quales ſe contienen todas las Raices de una Equacion, eſto es, que ninguna Raiz puede ſer mayor, que la una quantidad, que es uno de los limites, y el *ſuperior*, ni menor que la otra, que es el limite *inferior*. Por exemplo ſi 6, y 4 ſon los dos limites de las Raices de una Equacion, ninguna Raiz puede ſer mayor que 6, ni menor que 4. Encontrados los limites de las Raices, ſe facilita mucho la ſolucion del Problema, y reſolucion de la Equacion; pues ſe ſabe, que las Raices ſe contienen entre tales Limites.

126 Sea eſta Equacion $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$, en la qual todas las Raices ſon poſitivas, por ſer igual el numero de Raices al de mu-

mutaciones de Signos; transformandola pues en otra, diſminuyendo ſus Raices, haciendo $x = z - e$, por conſiguiente $z = x + e$, ſale como hemos viſto eſta Equacion

$$\left.\begin{array}{r} x^3 + 3ex^2 + 3e^2x + e^3 \\ - px^2 - 2pex - pe^2 \\ + qx + qe \\ - r \end{array}\right\} = 0$$

en la qual todos los valores de x ſon menores, que los valores de z de toda eſta quantidad e. Eſto ſupueſto, ſi ſe toma e, que ſea una quantidad tal, que el ultimo termino $e^3 - pe^2 + qe - r$, y los coeficientes de todos los demás terminos $3e^2 - 2pe + q$, $3e - p$ ſean *ſumas poſitivas*, todos los terminos de eſta Equacion ſerán *poſitivos*, y aſſi no habrá en ella mutacion alguna de Signos, por conſiguiente todas las Raices de dicha Equacion ſerán negativas; luego x ſerá quantidad negativa: pero $x = z - e$; luego $z - e$ ſerá una quantidad negativa: y e mayor que z, por conſiguiente mayor que ſus valores, ò Raices de la Equacion; por lo tanto e ſerá uno de los limites, y el ſuperior de la Equacion $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$.

127 Para encontrar pues eſte limite podemos ahorrar la transformacion, ſi atendèmos à lo que hemos dicho en el Capitulo antecedente, y es, que los coeficientes de la Equacion, que reſulta por la transformacion di-

dicha, se forman del ultimo termino, es à saber, multiplicando cada termino del ultimo por el exponente de e, que en él hai, y dividiendolo todo por e, sale el coeficiente del *penultimo*, y multiplicando cada termino de este coeficiente penultimo por el exponente de e, que en él hai, y dividiendolo todo por $2e$, sale el *antepenultimo*, y despues haciendo semejante multiplicacion, dividiendo por $3e$, sale su immediato, &c. Y que el ultimo termino de la transformada es la Equacion propuesta, poniendo z en lugar de e.

Por lo tanto si de la Equacion propuesta vamos formando Equaciones (por dicho methodo) que poniendo e en lugar de z serian coeficientes de la transformada, tendremos $z^3 - pz^2 + qz - r$, $3z^2 - 2pz + q$, $3z - p$, *y la quantidad, que puesta en lugar de* z *hará todas estas sumas positivas, será el Limite superior de la tal Equacion.*

128 Exemplo, sea esta Equacion $y^5 - 2y^4 - 10y^3 + 30y^2 + 63y + 120 = 0$, y se busque su *Limite superior*, ò una quantidad que sea *mayor*, que ninguna de las Raices de la Equacion, haciendo dicha operacion resultará

$$\begin{array}{r} y^5 - 2y^4 - 10y^3 + 30y^2 + 63y + 120 \\ 5y^4 - 8y^3 - 30y^2 + 60y + 63 \\ 10y^3 - 12y^2 - 30y + 30 \\ 10y^2 - 8y - 10 \\ 5y - 2 \end{array}$$

Pa-

Para encontrar el menor numero entre todos los poſſibles, que pueſto en lugar de *z* dé todas eſtas ſumas poſitivas, comienceſe à ſubſtituir 1; pero aunque las dos primeras ſumas reſultan poſitivas, la tercera, y quarta ſalen negativas; de donde ſe infiere, que 1 nò es mayor que todas las Raices de la Equacion propueſta, por conſiguiente ni ſu limite ſuperior.

Subſtituyendo 2 en lugar de *z*, ſe encuentra, que todas las ſumas ſon *poſitivas*, de lo que ſe ſigue, que 2 es el limite ſuperior de la Equacion, ò lo que es lo miſmo, mayor que ninguna de las Raices, porque abſolutamente ſerá mayor que ninguna Raiz *poſitiva* de dicha Equacion.

129 Para encontrar el *Limite de las Raices* negativas, ſi acaſo las hai (lo que ſe conoce por las mutaciones de Signos en los terminos) transformenſe las Raices negativas de la Equacion propueſta en poſitivas, y las poſitivas en negativas, ſegun diximos num. 101, hagaſe la miſma operacion, que en el numero precedente, y la quantidad que haga todas las ſumas poſitivas, ſerá con el Signo negativo el otro limite de las Raices negativas, que abſolutamente ſerá el *Limite inferior* de las Raices de la Equacion.

Porque en fuerza de eſta transformacion, las que reſultan Raices poſitivas en la nueva Equa-

Equacion, ſon negativas en la Equacion propueſta; luego el limite ſuperior de las Raices poſitivas en la nueva Equacion, mudandole el Signo, ſerá el limite de las Raices negativas en la propueſta. En el caſo preſente el limite inferior, ò limite de las Raices negativas es -4, de ſuerte que todas las Raices de la Equacion $y^5 - 2y^4 - 10y^3 + 30y^2 + 63y + 120 = 0$ ſe encontrarán entre 2, y -4, que ſon los limites de las Raices de la Equacion propueſta.

130 Encontrada ya la quantidad, ò limite ſuperior (e), que es mayor que ninguna de las Raices poſitivas de una Equacion, en que por exemplo z ſea la incognita, ſe ſigue, que e ſiendo mayor que ninguna Raiz, ſerá tambien mayor que ningun valor de z, por conſiguiente $e - z$ ſerá ſiempre quantidad poſitiva, luego haciendo $x = e - z$, el valor de x ſerá ſiempre poſitivo. Y aſſi ſe infiere de ahí una Regla general para transformar qualquier Equacion en otra, cuyas Raices ſean todas Poſitivas.

Regla. *Buſqueſe la quantidad* (e), *que excede la mayor Raiz poſitiva de la Equacion dada, quiteſe de la tal quantidad la incognita* (z), *hagaſe la diferencia* (e — z) *igual à otra incognita* (x), *buſqueſe en eſta Equacion ſimple* (e — z = x) *el valor de la incognita* (z) *de la Equacion propueſta, y ſubſtituyendolo en lugar de la in-*

incognita de la tal Equacion, reſultará otra, en que todas las Raices ſerán poſitivas.

Otra Regla para encontrar el Limite Superior de una Equacion, ſi tiene algun Coeficiente negativo.

131 *En qualquier Equacion el mayor Coeficiente negativo aumentado de la unidad ſiempre excede la mayor Raiz de la Equacion.*

Sea eſta Equacion $z^3 - pz^2 - qz - r = 0$, en la qual hai tres terminos negativos; tranſformandola en otra, haciendo $x = z - e$, ſe tendrá la Equacion ſiguiente

$$(C)\quad \left.\begin{array}{r} x^3 + 3ex^2 + 3e^2x + e^3 \\ - px^2 - 2pex - pe^2 \\ - qx - qe \\ - r \end{array}\right\} = 0$$

En la Equacion propueſta los tres coeficientes negativos p, q, r ſean iguales entre ſí. Si $e = p + 1$, ſubſtituyendo en lugar de e eſte valor, y p en lugar de q, y r, ſe reducirá eſta ultima Equacion à la ſiguiente

$$\left.\begin{array}{r} x^3 + 2px^2 + p^2x + 1 \\ + 3x^2 + 3px \\ + 3x \end{array}\right\} = 0$$

en la qual ſiendo todos los terminos poſitivos, no habrá mutacion alguna de Signos, por conſiguiente todas las Raices ſerán negativas,

tivas, luego todos los valores de x ſon quantidades negativas. Pero $x=z-e$, luego $z-e$ es quantidad negativa, y aſſi e es mayor que ningun valor de z, ò Raiz de la Equacion propueſta: pero $e=p+1$, luego $p+1$ es mayor que la mayor Raiz de la Equacion; y ſiendo $p=q=r$, como ſe ha ſupueſto, *ſi en alguna Equacion los dos, ò tres coeficientes negativos ſon iguales entre sí, y no hai coeficiente alguno negativo mayor, qualquiera de ellos aumentado de la unidad es mayor que ninguna de las Raices de la Equacion.*

132 Si q, y r ſon menores que p, por conſiguiente p es abſolutamente el mayor coeficiente negativo; haciendo $e=p+1$, en la Equacion C, las partes negativas, donde q, y r ſe encuentran, es à ſaber $-qx-qe$, $-r$, ſon aun menores, quedandoſe de la miſma ſuerte las demás; pero quando p, q, r ſe ſuponian iguales, todos los terminos de la Equacion (C) eran poſitivos, porque las quantidades negativas de los coeficientes no deſtruian las poſitivas, luego ſuponiendoſe aun menores q, y r quedarán todos los terminos en (C) poſitivos, y todos los valores de x negativos: pero $x=z-e$, luego $z-e$ es quantidad negativa, e es mayor que z, y ſus Raices, $e=p+1$, luego $p+1$ excede todas Raices, y por conſiguiente el mayor coeficiente negativo p aumentado de una unidad, es à ſaber

ber $p+1$ excede la mayor Raiz de la Equacion.

Pero adviertaſe, que aunque el tal coeficiente exceda la mayor Raiz de la Equacion, por conſiguiente ſea uno de ſus limites; pero no es decir, que ſiempre ſea el *menor* numero, ò quantidad, que excede la mayor Raiz, por conſiguiente aunque ſea limite, no ſiempre es el limite mas immediato.

Methodos comunes para encontrar los Limites de las Raices.

133 Aunque eſtos Methodos, que trahe difuſamente Maclaurin para encontrar los limites de las Raices ſean tal vez mas expeditos, y ciertamente mas univerſales, no obſtante no quiero omitir aquí los comunes.

Sea pues eſta Equacion del *Segundo Grado* $v^2+av-b=0$, cuyos limites ſe buſquen. Tendremos $v^2+av=b$, por conſiguiente $av<b$, $v<\frac{b}{a}$, ſerá pues v, ò ſu valor, ò Raiz de la Equacion *menor* que $\frac{b}{a}$, por lo tanto $\frac{b}{a}$ es limite *ſuperior* de la Equacion.

Mas por ſer $v^2+av=b$ tendremos $b>v^2$, luego $\sqrt{b}>v$. Multiplicando ambos miembros por v, ſerá $v\sqrt{b}>v^2$, y añadiendo à entram-

trambas partes av, reſultará $v\sqrt{b} + av > v^2 + av$; pero $v^2 + av = b$, luego $v\sqrt{b} + av > b$, por conſiguiente $v > \frac{b}{a + \sqrt{b}}$, y aſſi $\frac{b}{a + \sqrt{b}}$ ſerá el limite *inferior*. Por lo tanto los limites de la Equacion Quadrada $v^2 + av - b = 0$ ſerán $\frac{b}{a}$, $\frac{b}{a + \sqrt{b}}$.

134 Exemplo, buſquenſe los limites de eſta Equacion $v^2 + 4v - 12 = 0$, cotejandola con la precedente ſerá $a = 4$, $b = 12$, por lo tanto el limite ſuperior $\frac{b}{a} = \frac{12}{4} = 3$, y el limite inferior $\frac{b}{a + \sqrt{b}} = \frac{12}{4 + \sqrt{12}} = 1\frac{5}{7}$ deſpreciando algo, y aſſi la Raiz ſe encontrará entre 3, y $1\frac{5}{7}$, y ſe ve, que 2, una de las Raices de eſta Equacion, ſe contiene entre ellos, la otra ſerá $-\frac{12}{2} = -6$.

Si la Equacion dada del ſegundo grado tubieſſe otra forma, procedaſe de un methodo ſemejante. Pero adviertaſe, que eſte methodo no da los limites de todas las Raices de una Equacion, pues la otra Raiz de la Equacion propueſta es -6, que de ninguna ſuerte ſe comprehende entre tales limites.

135 Para los limites de las Equaciones del *Tercer Grado*, ſea la Equacion Cubica $v^3 - av + r = 0$, à quien le falta el ſegundo termino

mino (y ſi la Equacion dada lo tubieſſe, ſe le puede hacer deſaparecer por las Reglas dadas). Eſto ſupueſto, tendremos $v^3 = av - r$; por lo tanto $v^3 < av$, dividiendolo todo por v, ſerá $v^2 < a$, $v < \sqrt{a}$. Pues $\sqrt{a}$ ſerá *limite ſuperior* de la Raiz de la Equacion.

Mas $v^3 - av + r = 0$, por conſiguiente $v^3 + r = av$; luego $av > r$, $v > \frac{r}{a}$, de donde $\frac{r}{a}$ es el *limite inferior*, y aſſi la Raiz de la Equacion $v^3 - av + r = 0$, ſe contendrá entre $\sqrt{a}$, y $\frac{r}{a}$.

Sea la Equacion Cubica $v^3 - 19v + 30 = 0$. Cotejandola con la Equacion precedente, ſerá $a = 19$, $r = 30$; el limite *ſuperior* $\sqrt{a} = \sqrt{19} = 4.3$ algo mas, y el limite *inferior* $\frac{r}{a} = \frac{30}{19} = 1\frac{11}{19}$.

De un methodo ſemejante ſe procede para los limites, ſi la Equacion Cubica dada tubieſſe otra forma.

136 Finalmente para encontrar dichos limites en las Equaciones del *Quarto Grado*, ſea eſta Equacion $v^4 - av^2 - bv - r = 0$, à quien le falta ya el ſegundo termino, tendremos $v^4 - av^2 = bv + r$. Siendo $bv + r$ quantidad poſitiva, tambien lo ſerá $v^4 - av^2$, y $v^4 > av^2$, dividiendo por v^2 dará $v^2 > a$, $v > \sqrt{a}$, por lo

lo tanto $\sqrt{a}$ será *limite inferior* de la tal Equacion.

Mas $v^4 - av^2 - bv = r$. Dividiendo el primer miembro por v, será $v^3 - av - b < r$, por consiguiente tambien $v^3 - av < r + b$. Divídase el primer miembro por v, será con mucha mas razon $v^2 - a < r + b$, tambien $v^2 < r + b + a$, finalmente $v < \sqrt{(r + b + a)}$. Por lo tanto los limites de la Equacion del *Quarto Grado* $v^4 - av^2 - bv - r = 0$, serán el *superior* $\sqrt{(r + b + a)}$, el *inferior* será $\sqrt{a}$.

Ya se puede inferir de estos Exemplos, como se haya de proceder si las Equaciones, cuyos limites se buscan, tubiessen otras formas.

ARTICULO II.

De los Limites entre cada Raiz en particular.

137 EN el Articulo antecedente solo hemos dado Reglas para encontrar los limites, que comprehenden entre sí todas las Raices, es à saber, que ninguna Raiz puede ser mayor que el uno, y ninguna menor que el otro; mas en este Articulo buscamos los limites entre cada Raiz en particular. Pero supuesto que en el num. 130 hemos mostrado de què suerte qualquiera Equacion se puede transformar en otra, que ten-

tengâ todas ſus Raices poſitivas, ſolo hablaremos en adelante, tratando de los Limites, de las Equaciones, que tengan todas ſus Raices poſitivas.

Repreſentenſe todas las Equaciones por eſta $(z-a)\times(z-b)\times(z-c)\times(z-d)$ &c. $=0$, cuyas Raices ſon a, b, c, d. Siendo todas las Raices de eſta Equacion poſitivas, es cierto, que el limite inferior de todas ellas ſerá 0, pues ninguna Raiz poſitiva puede ſer menor que 0, y el otro limite ſea la quantidad e, que por las Reglas del Articulo antecedente podemos encontrar.

138 Pero à mas de eſtos limites podemos deſcubrir otros de *cada Raiz en particular*, eſto es, los limites entre los quales ſe comprehende la *primera Raiz*, que es la *inferior de todas*, los limites entre quienes ſe comprehende la *ſegunda Raiz*, que es la *inferior de todas, excepto la primera*, y finalmente los limites entre los quales ſe comprehende, ò contiene la *tercera Raiz*, que es la *inferior de todas, excepto la primera, y la ſegunda*, &c. y aſſi de la quarta, quinta, ſexta, &c.

139 Sea pues la *primera Raiz* a, la *ſegunda* b, la *tercera* c, &c. Si en la Equacion ſubſtituimos o en lugar de la incognita, ſiendo todos los terminos menos el ultimo productos de z, todos los terminos menos el ultimo deſaparecerán, ò ſerán 0, y la quantidad

à que ſe reduzga la Equacion entera, hecha la ſubſtitucion, ſerá el ultimo termino, que no teniendo por factor la incognita z, tampoco en la tal ſubſtitucion tendrá por factor o, por conſiguiente no deſaparecerá, y ſe quedará en todo, y con el miſmo ſigno en que eſtaba antes de la ſubſtitucion de o por la incognita.

140 Si ſubſtituimos en lugar de la incognita una quantidad *inferior* à la *primera Raiz* (*a*), que por conſiguiente le ſerá ſu *limite inferior*, todos los factores $z-a$, $z-b$, *&c.* de la Equacion ſerán negativos; porque ſiendo la quantidad ſubſtituida menor que la primera Raiz, que es la inferior à todas, ſerá tambien menor que las demás. Sea eſta quantidad g, luego $g-a$ es quantidad negativa, de la miſma ſuerte $g-b$, *&c.* y el producto, que es la Equacion miſma, hecha la ſubſtitucion, ſerá poſitivo, ò negativo, ſegun la dimenſion, ò el grado de la Equacion ſea par, ò impar. Si es par, el producto ſerá *poſitivo*; porque un numero par de factores negativos da producto poſitivo: ſi es impar, el producto ſerá *negativo*; porque un numero impar de factores negativos da el producto negativo.

Pero ſupueſtas las Raices de la Equacion poſitivas, como al preſente, tambien el *ultimo termino* es poſitivo, ò negativo, ſegun el grado, ò dimenſion de la Equacion ſea par,

ò

ò impar: luego *ſubſtituyendo en una Equacion en lugar de la incognita una quantidad inferior à la primera Raiz, la quantidad que reſulte, tendrá el miſmo ſigno, que el ultimo termino de la Equacion.*

141 Si en lugar de la incognita ſubſtituimos en la Equacion una quantidad *mayor* que la primera Raiz, pero *menor* que las demás (que por conſiguiente ſerá el limite *ſuperior* de la primera, è *inferior* de la ſegunda) la quantidad que reſulte, tendrá el ſigno contrario al que tenia antes, eſto es, *contrario al ſigno del ultimo termino de la Equacion*; porque quedando todos los demás factores negativos, uno ſerá poſitivo, es à ſaber $g - a$, ò $z - a$.

142 En lugar de la incognita ſi ſubſtituimos una quantidad *mayor* que las dos primeras Raices, pero *menor* que las demás (que por conſiguiente ſerá *limite ſuperior de la ſegunda Raiz*, è *inferior de la tercera*) la quantidad que reſulte, tendrá ſigno contrario al que tenia por la ſubſtitucion immediata antecedente, por ſer un factor diferente en orden à los ſignos à los factores de la antecedente ſubſtitucion; pero en la ſubſtitucion antecedente, la quantidad que reſultaba, tenia ſigno *contrario* al ſigno del ultimo termino de la Equacion propueſta: luego *ſubſtituyendo en lugar de la incognita una quantidad mayor,*

que las dos primeras Raices, la quantidad que reſulte, volverá à tener el miſmo ſigno, que el ultimo termino de la Equacion.

Y aſſi proſiguiendo en ſubſtituir ſucceſſivamente en lugar de la incognita de la Equacion quantidades, que ſean limites de las Raices, como hemos hecho en las ſubſtituciones dichas, las quantidades que reſulten, irán alternando los ſignos +, —, los miſmos, y contrarios al ſigno del ultimo termino. Luego podemos ſacar eſta Regla general para encontrar los Limites de las Raices entre sí.

Regla. *Si ſubſtituimos ſucceſſivamente empezando deſde* o (como hemos hecho) *en lugar de la incognita de la Equacion quantidades, que den reſultados alternativamente de miſmos, y contrarios ſignos al del ultimo termino de la Equacion, eſtas quantidades ſon Limites de las Raices entre sí.* Por lo tanto pueſta la Equacion, ſerá meneſter probar dichas ſubſtituciones, comenzando deſde o ácia arriba, como ſe ve en eſte Exemplo.

143 Buſquenſe los limites de las Raices en particular de eſta Equacion $y^3 - 12y^2 + 44y - 48 = 0$. Subſtituyendo o en lugar de la incognita, ſe reduce toda la quantidad al ultimo termino -48, cuyo ſigno es negativo. Subſtituyendo la unidad 1 en lugar de la incognita, ſe reduce à -15, quantidad del miſmo ſigno, que el ultimo termino de la Equa-

Equacion propueſta, de donde infiero, que 1 es aun inferior à la primera Raiz, y aſſi ſerá ſu limite. Subſtituyendo 3, ſe reduce toda la Equacion à + 3, que teniendo ya ſigno diferente al del ultimo termino, ſerá mayor que la primera Raiz; de donde 1, y + 3 ſon limites de la primera Raiz, y aſſi ſe contendrá entre eſtas quantidades, y en efecto aſſi es, porque la Raiz primera de la tal Equacion es 2. Y aſſi ſe proſeguirá en las demás ſubſtituciones.

En general *ſubſtituyendo ſucceſſivamente en una Equacion en lugar de la incognita dos quantidades qualeſquiera, que den reſultados de contrarios ſignos entre sí, ſiempre una, ò muchas de las Raices de la Equacion ſe contienen entre eſtas quantidades.* Porque en eſte caſo es neceſſario, que uno, ù otro de los factores de la Equacion haya mudado de ſigno del que tenia en la primera ſubſtitucion, por conſiguiente ſi el primer termino ſubſtituido era mayor que una Raiz, el otro ſerá menor, ò al contrario.

Aſſi ſi en eſta Equacion $z^3 - 2z^2 - 5 = 0$ en lugar de z ſe ſubſtituye 2, la Equacion ſe reduce à $8 - 8 - 5 = -5$; ſi ſe ſubſtituye 3, ſe reduce à $27 - 18 - 5 = +4$, de donde alguna de las Raices de la Equacion ſe contiene entre 2, y 3.

144 De lo dicho inferimos un buen methodo

thodo para encontrar la Equacion, cuyas Raices ſean limites de las Raices de otra, y ſe llama *Equacion de los Limites.* Conſideremos atentamente eſta *Equacion Cubica* $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$, y la que reſulta de ſu transformacion en otra, haciendo $x = z - e$.

$$(A)\quad \left.\begin{array}{rrrr} x^3 + & 3ex^2 + & 3e^2x + & e^3 \\ - & px^2 - & 2pex - & pe^2 \\ & + & qx + & qe \\ & & - & r \end{array}\right\} = 0$$

Eſto preſupueſto, ſuponiendo ſucceſſivamente e igual à los tres valores de z, comenzando deſde el inferior, en todas tres ſubſtituciones habrá en eſta nueva Equacion una Raiz $= 0$, porque ſiempre en qualquiera de eſtas ſupoſiciones ſerá $x = z - e = 0$; luego en todas tres ſupoſiciones deſaparecerá el ultimo termino $e^3 - pe^2 + qe - r$, y ſe reducirá la transformada à eſta Equacion ſiguiente

$$(B)\quad \left.\begin{array}{rrr} x^2 + & 3ex + & 3e^2 \\ - & px - & 2pe \\ & + & q \end{array}\right\} = 0$$

en la qual atendiendo à la naturaleza de las Equaciones, en que el ultimo termino es el producto de las Raices, ſerá $3e^2 - 2pe + q$ el producto de lo que queda de los demás valores de x, ò de los exceſſos de los otros valores de z ſobre el que ſe ſupone ſer igual à e en cada ſupoſicion, pues en qualquiera de ellas $x = z - e$.

De

145 De donde 1°. ſi e es igual à la *primera Raiz* de la Equacion propueſta $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$, ò lo que es lo miſmo, al inferior valor de z, ſolo el primer $z - e = 0$, por conſiguiente los otros dos exceſſos, ò diferencias, ò los otros dos valores de x ſerán poſitivos, y en la transformada B el ultimo termino $3e^2 - 2pe + q$ ſerá una quantidad poſitiva, por ſer producto de ſolos dos factores de ſemejantes ſignos.

2°. Si e es igual à la ſegunda Raiz de la Equacion propueſta, ò al ſegundo valor de z, de los dos valores de x, de que ſe compone el tercer termino $3e^2 - 2pe + q$, que ſon los dos exceſſos, ò diferencias, el uno ſerá aun poſitivo, y el otro negativo. El primer $z - e$, ò el primer valor de z, menos la quantidad e, *igual à la ſegunda Raiz*, es quantidad negativa, por ſer la Raiz primera menos la Raiz ſegunda, ò la quantidad menor menos la mayor; el tercer $z - e$, ò el tercer valor de z menos la quantidad e ſerá quantidad poſitiva, por ſer la Raiz tercera, menos el igual à la Raiz ſegunda, ò lo que es lo miſmo, el mayor menos el menor, luego el producto de los dos, que es el tercer termino $3e^2 - 2pe + q$, ſerá el producto de un poſitivo, y de un negativo, *y aſſi ſerá quantidad negativa.*

3°. Si e es igual al mayor valor de z, ò à *la tercera Raiz*, los otros dos $z - e$ ſerán

quan-

quantidades negativas, por ſer aſſi la Raiz *primera, como la ſegunda diſminuidas de una quantidad igual à la Raiz tercera* (*e*), que es una quantidad mayor que ninguna de ellas, por conſiguiente ſerán quantidades negativas, y aſſi los dos primeros valores de $x = z - e$ ſerán *quantidades negativas*, luego el producto de entrambos, que es el tercer termino $3e^2 - 2pe + q$ de la Equacion *B*, volverá à ſer *quantidad poſitiva.*

146 Preſupueſta toda eſta doctrina, como el ultimo termino de la Transformacion *A*, es à ſaber $e^3 - pe^2 + qe - r$, es lo miſmo que la Equacion propueſta $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$, teniendo *e* en lugar de *z*, ſi en el coeficiente del penultimo termino de la Transformacion (*A*) $3e^2 - 2pe + q = 0$ Equacion Quadrada, ſe ſubſtituyen ſucceſſivamente las tres Raices de eſta Equacion $e^3 - pe^2 + qe - r = 0$, las quantidades que reſulten, irán teniendo ſucceſſivamente los ſignos +, −, +, por conſiguiente las tres Raices de la Equacion Cubica, ſerán los limites de la Equacion Quadrada $3e^2 - 2pe + q = 0$.

Eſto es, la inferior Raiz de la Equacion Cubica ſerá menor que la inferior Raiz de la Equacion Quadrada, y ſerá ſu *Limite inferior.* La *ſegunda* Raiz de la Equacion Cubica eſtará entre las dos Raices de la Equacion Quadrada, por lo tanto ſerá limite *ſuperior* de la primera

mera Raiz, è inferior de la ſegunda. Finalmente la tercera Raiz de la Equacion Cubica ſerá el *ſuperior Limite* de la ſegunda Raiz de la Equacion Quadrada, como ſe verá de eſta ſuerte, que las tres Raices de la Equacion Cubica, ſon los limites de las Raices de la Quadrada.

147 Por el contrario de la miſma doctrina ſe infiere, que las dos Raices de la Equacion Quadrada junto con o, ſerán tambien los tales limites de las dos Raices inferiores de la Equacion Cubica; eſto es, la *primera* Raiz de la Equacion Quadrada ſerá el limite *ſuperior* de la *primera Raiz* de la Equacion Cubica (porque el *inferior* ſerá o) è inferior de la ſegunda Raiz de la miſma Equacion Cubica, la ſegunda Raiz de la Equacion Quadrada, ſerá limite *ſuperior* de la ſegunda Raiz de la Equacion Cubica, è *inferior* de la tercera: como ſe verá contemplando alternativamente las dos Raices de la Equacion Quadrada entre las tres de la Cubica.

148 Mas como dicha Equacion Quadrada ſe forma de la Cubica, multiplicando cada termino de la Cubica por el *Exponente* de *e* en el miſmo termino, y dividiendolo todo por *e*, eſto es $\frac{3e^3 - 2pe^2 + qe - or}{e} = 3e^2 - 2pe + q.$

De ahí ſe puede ſacar por ultima conſequencia de quanto hemos dicho, que como el

el ultimo termino $e^3 - pe^2 + qe - r$ de la Equacion, que reſulta por la Transformacion A, es lo miſmo que la Equacion propueſta $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$, teniendo e en lugar de z, y que el coeficiente del penultimo termino $3e^2 - 2pe + q$, ſe forma del ultimo del modo dicho: *La Equacion que reſulta, multiplicando cada termino de la Equacion propueſta por el Exponente de la incognita, que en él hai, y dividiendolo todo por la incognita, es la Equacion, cuyas Raices ſon los Limites de las Raices de la Equacion propueſta.*

149 La practica de eſta Regla ſe verá en eſte Exemplo. Buſqueſe la *Equacion de los Limites* de las Raices de eſta Equacion Cubica

$$z^3 - 12z^2 + 44z - 48 = 0.$$

Segun la Regla que hemos dado la Equacion de dichos Limites ſerá la ſiguiente

$$\frac{3 \times z^3 - 2 \times 12z^2 + 1 \times 44z - 0 \times 48}{z} = 3z^2 - 24z + 44 = 0.$$

De donde las Raices de eſta Equacion $3z^2 - 24z + 44 = 0$ ſerán los Limites de las Raices de la Equacion propueſta.

Buſquemos pues las Raices de eſta Equacion $3z^2 - 24z + 44 = 0$. Haciendo la operacion tendremos $3z^2 - 24z = -44$, dividiendo por 3, $z^2 - 8z = -\frac{44}{3}$, completando el Quadrado, ſerá $z^2 - 8z + 16 = 16 - \frac{44}{3}$

=

$= \frac{48-44}{3} = \frac{4}{3}$, ſacando la Raiz de entrambas partes $z-4 = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$, finalmente $z = 4-\sqrt{\frac{4}{3}}$, $z = 4+\sqrt{\frac{4}{3}}$.

Pues los Limites de la Equacion Cubica $z^3 - 12z^2 + 44z - 48 = 0$ ſon 0, $4-\sqrt{\frac{4}{3}}$, $4+\sqrt{\frac{4}{3}}$. Y en realidad aſſi es, porque las Raices de la Equacion propueſta ſon, la *primera* 2, que ſe contiene entre 0, y $4-\sqrt{\frac{4}{3}}$, la *ſegunda* 4, que ſe contiene entre $4-\sqrt{\frac{4}{3}}$, y $4+\sqrt{\frac{4}{3}}$, y la *tercera* 6, de la qual es limite *inferior* $4+\sqrt{\frac{4}{3}}$.

Eſta Regla ſobredicha ſe eſtiende no ſolo à la Equacion de los Limites de las Equaciones Cubicas, ſino tambien à la Equacion de los Limites de las Equaciones de quarto, de quinto grado, &c.

CAPITULO XI.

Methodos para encontrar las Raices Commenſurables de qualquier Equacion.

150 TOdo quanto hemos dicho haſta al preſente ſolo ha ſido como preludio para diſponer al fin principal de encontrar las Raices de las Equaciones Superiores, y ha ſervido para conocer en general

neral la Naturaleza de las Equaciones, el Numero de Raices, que cada una tiene, ſu Calidad, ſu Suma, ſus Productos, ſus Limites, &c. Pero llegando ya al particular de la Reſolucion de una Equacion, como ſus Raices, pueden ſer *Racionales*, *Irracionales*, è *Impoſſibles*, ò parte unas, parte otras, primero daremos Reglas para ſacar las Raices Racionales, ò Commenſurables.

Encontradas todas eſtas, moſtraremos como ſe conoce, ſi las otras que quedan ſon Poſſibles, ò Impoſſibles, ò lo que es lo miſmo, ſi ſon Irracionales, ò Imaginarias, y quantas haya de cada eſpecie. Finalmente enſeñaremos de que ſuerte ſe ſacan las Raices por aproximacion, lo que ſirve principalmente para encontrar las Raices Incommenſurables, y à veces tambien las Commenſurables, ò Racionales, caſo que no ſe neceſſite una total exactitud.

151 Si todas las Raices de una Equacion fueſſen las miſmas (lo que rara vez ſucede) la Equacion Superior no ſería otra coſa, que una Potencia perfecta de una Equacion Simple; por conſiguiente ſacar ſu Raiz ſería lo miſmo que ſacar la Raiz de una quantidad compueſta, de que ya hablámos en el primer Tomo. Pero ſi las Raices ſon diferentes entre sí (como ſucede comunmente) pueſta la Equacion lo mas liſa que ſe pueda, limpia de Frac-

Fracciones, de ſignos Radicales, y finalmente en todo bien ordenáda, ſe pueden encontrar ſus Raices por los tres principales Methodos, de que ſe valen eſpecialmente los Authores Ingleſes, para encontrar las Raices de de las Equaciones Superiores, fundados eſtos tres Methodos en tres diferentes Principios, que ya en el diſcurſo de eſta Obra hemos demonſtrado.

152 El Primero es, que ſiendo el ultimo termino de una Equacion el *Producto de todas las Raices*, eſtas han de ſer ſus factores, por conſiguiente ſus Diviſores exactos; luego encontrando todos los Diviſores del ultimo termino, algunos de ellos han de ſer las Raices de la Equacion, ſi eſtas ſon Commenſurables. Pero para diſcernir quienes de eſtos Diviſores encontrados ſon las Raices (porque no ſiempre lo ſon todos) acuden à otra propriedad de la Raiz de la Equacion, y es, que debe la Raiz ſer una quantidad, que ſubſtituida en la Equacion por la incognita, haga que los terminos mutuamente ſe deſtruyan, ò ſu ſuma igual à o.

153 El Segundo Principio es, que toda Equacion Superior es un *Producto de tantas Equaciones Simples, quantas unidades contiene el Exponente de la Equacion*; luego eſtas Equaciones Simples han de ſer ſus factores, por conſiguiente ſus Diviſores exactos. Por

lo

lo tanto encontrando los Diviſores *Binomios*, ſe han de encontrar las Equaciones Simples, que la forman, y en eſtas las Raices de la Equacion, por ſer las miſmas las Raices de la Equacion Superior, que las de las Equaciones Simples ſus factores. Llamanſe eſtos Diviſores Binomios de una quantidad *Diviſores de una dimenſion*, por entrar en ellos ſolo una dimenſion de la incognita.

154 El Tercer Principio es, que ſiendo qualquier Equacion Superior el Producto de alguna, ò algunas Equaciones del Segundo Grado, eſtas Equaciones Quadradas han de ſer factores, por conſiguiente ſus Diviſores; luego encontrando los Diviſores *Trinomios*, ò de dos *dimenſiones* de la quantidad, que es la miſma Equacion, eſtos Diviſores Trinomios han de ſer las Equaciones Quadradas, de cuya multiplicacion la Equacion Superior ſe forma. Encontradas eſtas Equaciones Quadradas, en ellas facilmente ſe encuentran las Raices de la Equacion Superior.

Por lo tanto los Methodos, que daremos para encontrar las Equaciones Inferiores, de que las Superiores ſe componen, podrán facilmente ſervir para encontrar los Diviſores Binomios, y Trinomios de las Quantidades, pues para entrambas coſas ſon caſi los miſmos los Principios, y Fundamentos.

ARTI-

ARTICULO PRIMERO.

Primer Methodo para encontrar las Raices Commenſurables de una Equacion.

155 PResupueſta la doctrina, que en eſte Capitulo hemos explicado para valernos del *Primer Methodo*, que da unicamente las *Raices Commenſurables* de la Equacion Superior, tomeſe la ſiguiente

Regla. *Paſſenſe todos los terminos de la Equacion à un lado, ſegun las Reglas dadas para ello. Buſquenſe todos los Diviſores del Ultimo Termino, ſubſtituyanſe ſucceſſivamente uno à uno ya con ſigno poſitivo, ya con ſigno negativo en lugar de la incognita; y el Diviſor, que aſſi pueſto haga, que todos los terminos de la Equacion mutuamente ſe deſtruyan, ò lo que es lo miſmo, la Suma de todos = 0, ſerá una de las Raices de la Equacion.*

Si ninguno de los diviſores del ultimo termino, aſſi ſubſtituido en lugar de la incognita hace deſaparecer todos los terminos, es ſeñal, que ſus Raices ſon Incommenſurables, ò Impoſſibles; pues ſi fueſſen Commenſurables, ſerian algunos de los Diviſores exactos del ultimo termino.

Exem-

156 *Exemplo* 1°. Sea esta Equacion $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$, cuyas Raices se buscan. Haciendo alguna reflexion sobre lo dicho, reparo 1°. Que dicha Equacion siendo del *tercer grado* debe tener tres Raices. 2°. Que habiendo dos variaciones de signos dos de estas Raices deben ser *positivas*, por consiguiente la otra debe ser *negativa*. 3°. Que la suma de estas Raices debe ser $= 4$, porque el coeficiente del segundo termino con signo contrario es la suma de las Raices. 4°. Que el producto de estas Raices debe ser $= 10$ con signo contrario, esto es -10, por ser Equacion de grado impar.

Esto presupuesto, los divisores del ultimo termino 10 son 1, 2, 5, 10, los quales, substituyendolos succesivamente ya con el signo $+$, ya con el $-$ en lugar de la incognita x, dan los resultados siguientes:

$$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$$

Subst.	
1	$+1 - 4 - 7 + 10 = 0$
-1	$-1 - 4 + 7 + 10 = 12$
2	$+8 - 16 - 14 + 10 = -12$
-2	$-8 - 16 + 14 + 10 = 0$

luego las dos Raices de la Equacion dada son 1, y -2; por lo tanto será la otra $\frac{10}{2} = 5$.

157 *Exemplo* 2°. Sea dada esta Equacion $y^5 - 61y^3 + 180y^2 = 0$, de quien se hayan de ex-

extraher ſus Raices. Como dos ſon = 0, por ſer diviſible por el quadrado de la incognita, reduciendola, quedará la Equacion del tercer grado $y^3 - 61y + 180 = 0$, à quien faltandole el ſegundo termino, y ſiendo de las tres Raices de la Equacion las dos poſitivas, la ſuma de eſtas ſerá igual à la negativa; de donde encontradas las dos poſitivas, ſumandolas encontraremos la negativa, ò quitando de la negativa una de las poſitivas, hallaremos la otra poſitiva (preſcindiendo de los ſignos).

Haciendo pues la operacion buſcando las Raices poſitivas, ſerá

Subſt.	$y^3 - 61y + 180 = 0$
1	$1 - 61 + 180 = 120$
2	$8 - 122 + 180 = 66$
3	$27 - 183 + 180 = 24$
4	$64 - 244 + 180 = 0$
5	$125 - 305 + 180 = 0$

luego ſiendo las dos Raices 4, y 5, ſerá la negativa -9, porque $4 + 5 = 9$, y $4 + 5 - 9 = 0$.

158 *Exemplo* 3º. Hayaſe de reſolver la Equacion $\left.\begin{matrix} x^3 - 3ax^2 + 2a^2x - 2a^2b \\ - bx^2 + 3abx \end{matrix}\right\} = 0.$

Eſta Equacion debe tener tres Raices, y habiendo tres variaciones de ſignos, deben ſer todas *poſitivas*, con que encontrando los diviſores del quarto termino, ſerá ſuperfluo

el ſubſtituirlos con ſigno negativo. Eſtos diviſores literales ſon $a, b, 2a, 2b, 2ab, 2a^2$, ſubſtituyendo a por la incognita, tendremos

$$\left.\begin{matrix} a^3 - 3a^3 + 2a^3 - 2a^2b \\ -ba^2 + 3a^2b \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} +3a^3 + 3a^2b \\ -3a^3 - 3a^2b \end{matrix}\right\} = 0;$$

pues a es una de las Raices de la Equacion dada.

Mas ſi ſubſtituimos b, encontraremos

$$\left.\begin{matrix} b^3 - 3ab^2 + 2a^2b - 2a^2b \\ -b^3 + 3ab^2 \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} +b^3 + 3ab^2 + 2a^2b \\ -b^3 - 3ab^2 - 2a^2b \end{matrix}\right\}$$

$= 0$, luego b es otra de las Raices; la tercera por conſiguiente debe ſer $\frac{2a^2b}{ab} = 2a$, por ſer las tres Raices factores del ultimo termino. Y aſſi las tres Raices de la Equacion propueſta ſon $a, b, 2a$.

159 Quando la Equacion es *literal*, que à mas de la incognita, no contiene ſino una quantidad conocida, ò letra, y ſus potencias, ſiguiendo el orden de los terminos, ſuponiendo por ellas la unidad (1), ſe puede reſolver, como ſi fueſſe preciſamente numerica, y encontrando la Raiz en numeros, cada numero encontrado por Raiz, *multiplicado* por la tal quantidad, ſerá la Raiz de la Equacion.

Buſquenſe las Raices de la ſiguiente Equacion $x^3 + 3ax^2 - 4a^2x - 12a^3 = 0$.

Reparo que en ella, à mas de la incognita, ſolo entra la quantidad a, y ſus potencias. Para reſolverla facilmente, ſubſtituyo 1 por

a,

a, y se reduce dicha Equacion à $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$. Como no hai sino una variacion, no habrá sino una Raiz positiva, y las otras serán negativas. Substituyo los divisores del ultimo termino 1, — 1, 2, — 2, 3, — 3, &c. Comenzando por la substitucion de 1, tendré

$$\begin{array}{r|l} 1 & +1+3-4-12=-12 \\ -1 & -1+3+4-12=-6 \\ 2 & +8+12-8-12=0 \end{array}$$

pues una de las Raices será $2 \times a$.

Prosigo en buscar del mismo modo las otras Raices, que se encontrarán ser $-2a$, $-3a$.

160 Quando los divisores del ultimo termino son muchos, nos podremos servir de lo que hemos dicho acerca de los *Limites de las Raices*; pues todo divisor, que esté mas allá de los limites, ò no esté contenido dentro de ellos, es ocioso el substituirlo por la incognita, pues es cierto, que no es Raiz de la Equacion.

Por exemplo, tenemos esta Equacion para resolverla $y^4 - 2y^3 - 25y^2 + 26y + 120 = 0$. Los divisores del ultimo termino 120 son muchos, y sería trabajo inmenso el irlos substituyendo todos; pero advirtiendo, que el *mayor Coeficiente negativo* de la Equacion es 25, todo divisor del ultimo termino, que excede 25 + 1, esto es 26, es ocioso el probarlo, pues es cierto, que no es Raiz.

161 Encontrada ya una Raiz de la Equacion por las Reglas dadas, si de esta Raiz, y de la incognita formamos una Equacion simple, de manera que al un lado esté o, dividiendo por ella toda la Equacion, el quociente será una Equacion de inferior grado, cuyas Raices serán las otras, que faltan à la Equacion propuesta; pues la tal Equacion está formada por la multiplicacion de dicha Equacion simple, y de la otra de inferior grado.

Encontrado pues por las Reglas superiores, que 3 es una de las Raices de esta Equacion $v^3 - 2v^2 - 33v + 90 = 0$, tendremos por consiguiente $v = 3$, de donde $v - 3 = 0$. Si dividimos la Equacion propuesta por $v - 3$, el quociente será la Equacion quadrada $v^2 + v - 30 = 0$, cuyas dos Raices serán las otras dos de la Equacion cubica propuesta.

162 De este methodo nos podremos valer siempre que à la Equacion propuesta le falte el ultimo termino, pues entonces es señal, que una de sus Raices es $= 0$; luego dividiendo la tal Equacion por $v + 0$, tendremos una Equacion inferior, cuyas Raices serán las otras que buscamos. Si le faltan los dos ultimos terminos, la habremos de dividir por v^2, y las Raices de la Equacion, que sea quociente, serán las demás.

El ultimo termino de una Equacion siempre es una quantidad conocida, pero esta quanti-

dad

dad conocida, y las demás que eſtán mezcladas en la Equacion muchas veces ſe ponen con letras, de manera que los diviſores parecen ſer tales fracciones, que eſpanta ſolo el penſar en buſcarles ſu valor. Para eſto ſerá acertado, quando ſe pueda, ſupueſto que es quantidad conocida, exprimirla en numeros, antes de arremeter à buſcarle ſus diviſores.

ARTICULO II.

Segundo Methodo para encontrar las Raices de las Equaciones Superiores.

163 EN el Articulo antecedente hemos buſcado las Raices de las Equaciones, fundados ſobre el Principio cierto, que ſiendo el ultimo termino de la Equacion el *Producto de todas las Raices*, eſtas, ſi ſon Commenſurables, ſe han de encontrar entre los Diviſores de eſte ultimo termino. Pero ahora hemos de proceder fundados en otro Principio no menos cierto, y es, que ſiendo la Equacion ſuperior un *Producto de todas las Equaciones Simples*, que por multiplicacion la componen, eſtas Equaciones ſimples ſe han de encontrar entre los Diviſores *Binomios*, ò de *una dimenſion* de la tal Equacion.

Luego ſirviendonos del Methodo de Newton

ton para encontrar los Divisores Binomios de una quantidad, aplicando esta doctrina à la Equacion superior, y sus factores, encontraremos las Equaciones simples, de que se compone, y por consiguiente las Raices de la Equacion. Para lo qual tomese la siguiente

164 Regla. *Substituyanse successivamente en lugar de la incognita los terminos de la Progression Arithmetica* 3, 2, 1, 0, — 1, — 2, &c. *Busquense todos los Divisores de las Sumas, à que la Equacion se reduce por esta substitucion, y ponganse esta Suma, y Divisores respectivos en una linea recta, que corresponda al termino, que se ha substituido. Busquense todas las Progressiones Arithmeticas, que se puedan formar de los terminos de estas lineas de Divisores por su orden* (que es el mismo que el de los terminos substituidos) *en las quales Progressiones la Diferencia reinante sea la unidad, ò bien algun Divisor del Coeficiente del primer termino de la Equacion, y las Raices de la Equacion se encontrarán entre los terminos de estas Progressiones, que correspondan por su orden enfrente de la substitucion de* 0 *por la incognita, divididos estos terminos por la Diferencia reinante de la Progression.*

Estas Raices son positivas, si la Progression Arithmetica, en que se encuentran, es creciente, comenzando de arriba ácia abaxo, y serán negativas si es decreciente.

De

De donde si la Diferencia reinante en la progresſion encontrada es la unidad, entonces la Raiz de la Equacion será el miſmo termino, que correſponde enfrente la ſubſtituçion de o por la incognita, porque la diviſion por 1 no muda el termino. Si la Diferencia reinante es diferente de la unidad (pues el diviſor del coeficiente del primer termino de la Equacion no ſiempre es ſola la unidad, como ſe verá en el ultimo Exemplo) la Raiz será una fraccion propria, ò impropria.

165 Buſquenſe pues por eſte Methodo las Raices de eſta Equacion Cubica $x^3 - x^2 - 10x + 6 = 0$. La Subſtitucion, los Reſultados, ò Sumas, los Diviſores como ſe han de poner, la Progreſſion que ſe encuentra, el Termino que es la Raiz, y finalmente la Operacion toda como ſe debe hacer, ſe ve en eſta Tabla.

Subſtit.	*Reſult.*	*Diviſores.*	*Prog. Arithm.*
2	— 10	1 . 2 . 5 . 10	5
1	— 4	1 . 2 . 4	4
0	+ 6	1 . 2 . 3 . 6	3*
— 1	+ 14	1 . 2 . 7 . 14	2

Subſtituyendo en la Equacion propueſta por x el termino 2, la ſuma de la Equacion ſe reduce à — 10, cuyos diviſores ſon 1 . 2 . 5 . 10.

Subſtituyendo por x el termino 1, la ſuma que reſulta es — 4, cuyos diviſores ſon 1.2.4, y aſſi de los demás, como ſe ve en la Tabla.

La

La Progreſſion Arithmetica, que de los terminos de las lineas de diviſores ſe puede formar por ſu orden, es 5.4.3.2, y el termino de eſta progreſſion, que correſponde enfrente de la ſubſtitucion de o por x, es 3, à quien para ſeñalarlo, ſe le junta la eſtrellita $*$. Y aſſi 3 es una de las Raices de la Equacion propueſta.

Pero porque la progreſſion, en que ſe encuentra, es *decreſciente*, ſerá Raiz *negativa*, y aſſi ſerá la tal Raiz -3; de manera que podremos inferir por uno de los valores de $x = -3$. Y para mas ſeguridad (lo que ſiempre ſe debe hacer) ſubſtituyaſe -3 en la Equacion en lugar de la incognita x, y veaſe ſi deſaparecen todos los terminos, ò ſe reduce ſu ſuma à o, ò bien (mas conforme à la Regla de Newton) dividaſe la Equacion propueſta por la Equacion ſimple $x+3=0$, y veaſe ſi la diviſion ſale exacta.

Como dicha Equacion tiene tres Raices, y ſolo ſe puede encontrar por el Methodo propueſto una Progreſſion Arithmetica, por conſiguiente una Raiz; para encontrar las demás nos habremos de valer de lo que hemos dicho num. 161, que es dividir la tal Equacion por $x+3=0$, y buſcar las Raices de la Equacion, que es el quociente, es à ſaber, $x^2-4x+2=0$, cuyas Raices ſon $2 \pm \sqrt{2}$.

166 Buſquenſe por eſte Methodo las Raices

ces de esta Equacion del quarto grado

$$x^4 + x^3 - 29x^2 - 9x + 180 = 0.$$

La Operacion es como se sigue.

Subst.	*Res.*	*Divisores.*	*Prog. Arithm.*			
2	70	1.2.5.7.10.14.35 &c.	1	2	5	7
1	144	1.2.3.4. 6. 8. 9 &c.	2	3	4	6
0	180	1.2.3.4. 5. 6. 9 &c.	3	4	3	5*
—1	160	1.2.4.5. 8.10.16 &c.	4	5	2	4
—2	90	1.2.3.5. 6. 9.10 &c.	5	6	1	3

Los terminos que corresponden en las Progressiones Arithmeticas ascendientes enfrente de la substitucion de o por x son 3, y 4, assi dos Raices serán positivas, es à saber, $x = 3$, $x = 4$. Los que corresponden en las Progressiones descendientes son 3, y 5, por consiguiente las otras dos Raices son negativas, de donde $x = -3$, $x = -5$.

Si entre los Divisores de los Resultados se encontrasse mayor numero de Progressiones Arithmeticas, que es el numero de Raices de la Equacion, las Raices se encontrarian entre los que corresponden enfrente de la substitucion de o por x, y assi para ver quienes de entre ellos son, se habria de probar, ò bien substituyendo cada uno en la Equacion en lugar de la incognita, de manera que la Equacion se reduzga à o, ò bien formando con la incognita una Equacion simple, y dividiendo por ella toda la Equacion.

Para

167 Para moſtrar como no es meneſter, que la Diferencia reinante de la Progreſſion Arithmetica ſea 1, buſquenſe las Raices de eſta Equacion $2x^3 - 5x^2 + 4x - 10 = 0$.

Subſtit.	*Reſult.*	*Diviſores.*	*Prog. Arithm.*
2	— 6	1 . 2 . 3 . 6	1
1	— 9	1 . 3 . 9	3
0	— 10	1 . 2 . 5 . 10	5*
— 1	— 21	1 . 3 . 7 . 21	7
— 2	— 54	1 . 2 . 3 . 6 . 9 &c.	9

En eſte caſo no ſe encuentra entre los Diviſores Progreſſion alguna Arithmetica, cuya diferencia reinante ſea 1, pero como el coeficiente del primer termino es 2, que tiene por uno de ſus diviſores 2, ſe encuentra una Progreſſion, cuya diferencia comun es 2. Por lo tanto el 5, que correſponde enfrente de 0, dividido por 2, es à ſaber $\frac{5}{2}$, es una de las Raices de eſta Equacion, la qual es *poſitiva*, por ſer aſcendiente la Progreſſion Arithmetica.

168 La Progreſſion Arithmetica de Terminos, que ſe ſubſtituyen por la incognita de la Equacion, ſe puede comenzar de mas arriba, como de 3, de 4, de 5, &c. y proſeguir mas abaxo haſta — 3, — 4, — 5, &c. Pero adviertaſe, que à veces los terminos de la progreſſion de Diviſores, que ſe encuentran enfrente

frente de 0, no se encuentran ser verdaderas Raices de la Equacion. Lo que proviene, de que no se toman bastantes terminos de la progression 1.0.—1.—2 &c.; porque si se tomáran mas, se veria, que la Progression Arithmetica ascendiente, ò descendiente no proseguiria à mas terminos, por lo tanto no sería progression apta.

De ahí es, que quando tomamos pocos terminos de la progression 2.1.0.—1.—2 &c. para substituir por la incognita, para asseguarnos es menester recurrir à substituir por la incognita el termino encontrado, y ver si los terminos mutuamente se destruyen, ò si se reduce la Equacion à ser = 0; ò bien à formar de él, y de la incognita un divisor, y ver si por él es exactamente divisible la Equacion. Si una de estas dos cosas sucede, podemos estar seguros, ser el termino encontrado Raiz de la Equacion; si no sucede, es señal, que si se prosiguiesse la substitucion de los terminos 2.1.0.—1 &c. no continuaria la Progression de los Divisores.

169 Para demonstrar esta Operacion, y el principio en que se funda esta Regla, que à poca diferencia es la misma, que para encontrar un Divisor *Binomio*, ò de una dimension de una quantidad compuesta en general, tomese esta Equacion $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, en la qual a, b, c, d, e signifiquen numeros

ros enteros positivos, ò negativos, y $px+q$ signifique un Divisor *Binomio*, por el qual la Equacion propuesta se pueda dividir exactamente, y el quociente que resulte de esta division sea rx^3+sx^2+tx+v, ò lo que es lo mismo, sea $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=(px+q)\times(rx^3+sx^2+tx+v)$.

170 Supuesto esto, substituyendo succesivamente como arriba en la Equacion en lugar de la incognita los terminos de la Progression Arithmetica 2, 1, 0, — 1, — 2, &c. tambien los correspondientes valores del Divisor Binomio $px+q$ irán formando otra Progression Arithmetica, es à saber, $2p+q$, $p+q$, q, $-p+q$, $-2p+q$, en la qual la diferencia reinante será p, cuya diferencia es necessario, que sea un divisor exacto del coeficiente (a) del primer termino de la Equacion; porque de otra suerte no saldria exacta la division de ax^4+bx^3 &c. por $px+q$, si p no se comprehendiesse exactamente en a.

De aquí es, que el Divisor Binomio, por el qual una expression de muchas dimensiones es divisible, es menester, que varíe de la misma suerte que varía x; de suerte que si por x se substituye una Progression Arithmetica, tambien en fuerza de estas substituciones, el divisor formará succesivamente otra Progression Arithmetica, cuya diferencia será p, *divisor del coeficiente de la superior dimension de* x *en la quantidad divisible.* De

De ahí ſe ve tambien, que eſta diferencia reinante p es el coeficiente del primer termino del diviſor indeterminado $px+q$, y que el ſegundo termino es q, *que es la quantidad à que ſe reduce el diviſor en la ſubſtitucion de* o *por la incognita* x; de donde eſta ſegunda parte q, junta con la incognita, ſerá un Diviſor Binomio, ſi el coeficiente del primer termino de la Equacion es 1, y eſta parte q junta con la incognita, multiplicada por un diviſor del coeficiente del primer termino de la Equacion, es à ſaber, $px+q$ ſerá el diviſor, ſi el tal coeficiente es una quantidad diferente de la unidad. Por lo tanto una de las Equaciones ſimples de que ſe formará la Equacion ſuperior ſerá $px+q=0$, de donde $x=-\frac{q}{p}$.

171 En ſubſtancia eſta es la Regla de Newton, no ſolo para encontrar las Raices de las Equaciones, pero aun à poca diferencia para encontrar los Diviſores Binomios de qualquiera quantidad, y es, que encontrados los Diviſores Simples de una quantidad, por las Reglas comunes à eſte fin, ſi hai ſoſpecha de haber aun algun Diviſor Binomio, ſe ordena la quantidad ſegun las dimenſiones de alguna letra, como en las Equaciones, ò para la Diviſion.

Se ſubſtituyen por la tal letra, ò quantidad algunos de los terminos de la Progreſ-

ſion

sion Arithmetica 2 . 1 . 0 . — 1 &c., en todo como arriba, excepto que entre los divisores se buscan unicamente las Progresiones Arithmeticas *decrescientes*, y el que se encuentra enfrente de la substitucion de 0, añadido à la tal letra, cuyas dimensiones se han arreglado, forma un divisor compuesto, por el qual se prueba la division de la quantidad dada, para ver si da un exacto quociente. Como se ve en este Exemplo.

172 Busquense los Divisores compuestos de esta quantidad $a^3 - a^2 - 10a + 6$. Substituyendo por a uno de los terminos de la progression 1 . 0 . — 1, tendremos lo siguiente

Subst.	*Res.*	*Divisores.*	*Prog. Arithm.*
1	4	1 . 2 . 4	+ 4
0	6	1 . 2 . 3 . 6	+ 3 *
— 1	14	1 . 2 . 7 . 14	+ 2

Añadiendo el + 3 à la quantidad a, tendremos por divisor, por quien se ha de probar la division, esta quantidad $a + 3$, por quien dividiendo la quantidad propuesta $a^3 - a^2 - 10a + 6$, encontraremos por quociente exacto $a^2 - 4a + 2$; de donde inferiremos, que $a + 3$ es uno de los Divisores compuestos de la quantidad dada. Si no sale esta division exacta, es señal, que la quantidad propuesta no tiene divisor alguno compuesto de la *primera dimension*.

ARTI-

ARTICULO III.

Tercer Methodo para encontrar las Raices de las Equaciones Superiores.

173 SI el methodo de encontrar un Diviſor Binomio, ò de una dimenſion de la quantidad, que es la Equacion, ſirve para encontrar las Equaciones *Simples*, de cuya multiplicacion la Equacion ſuperior eſtá compueſta, y en eſtas Equaciones ſimples las Raices de la Equacion ſuperior, *el methodo de encontrar los Diviſores Trinomios, ò de dos dimenſiones, ſervirá para encontrar las Equaciones Quadradas, de cuya multiplicacion la Equacion Superior ſe compone, y en ellas las Raices de la Equacion Compueſta.*

Si la Equacion, cuyas Raices ſe buſcan, es ſolo del tercer grado, no hai neceſſidad de eſte methodo, porque encontrando el Diviſor Binomio por el methodo antecedente, hecha la diviſion, el quociente ſerá la Equacion quadrada; pero ſi es del quarto, ò quinto grado, aunque ſe puede tambien proceder por el methodo antecedente, pero en tales caſos es largo, y ſe ahorra mucho, encontrando immediatamente las Equaciones quadradas, que ſon Diviſores, por conſiguiente

te factores de la Equacion ſuperior propueſta.

Supueſto todo como en el Articulo antecedente, el Diviſor Trinomio, ò de dos dimenſiones de la Equacion ſuperior $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, ſea eſta quantidad $mx^2 + px + q$, ſignificando m, p, q qualeſquiera numeros poſitivos, ò negativos. Subſtituyendo ſucceſſivamente en la Equacion en lugar de x los terminos de la Progreſſion Arithmetica $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$, &c. ſe reducirá el Diviſor Trinomio $mx^2 + px + q$ à eſtas quantidades $9m + 3p + q$, $4m + 2p + q$, $m + p + q$, q, $m - p + q$, $4m - 2p + q$, $9m - 3p + q$, en las quales m debe ſer un diviſor del coeficiente del primer termino de la Equacion, porque de otra ſuerte no ſaldria exacta la diviſion de la quantidad dada por el tal diviſor.

174 De aquí ſalen tres coſas, 1°. Que el coeficiente m del primer termino del diviſor $mx^2 + px + q$ es tambien un diviſor del coeficiente del primer termino de la Equacion propueſta.

2°. Que quitando el *producto de eſte coeficiente* (m) *por el quadrado de los terminos de la progreſſion* $3, 2, 0, -1$, *&c.* de las quantidades à que ſe reduce el diviſor $mx^2 + px + q$, por las ſubſtituciones de los terminos $3, 2, 0, -1$, &c. en lugar de la incognita x, las diferencias ſerán $3p + q$, $2p + q$, $p + q$, q, $-p + q$, $-2p + q$, $-3p + q$, que tambien forman una Pro-

Progreſſion Arithmetica, cuya diferencia reinante es p, *coeficiente del ſegundo termino del diviſor* $mx^2 + px + q$; porque $9m + 3p + q - 3^2 \times m = 3p + q$, $4m + 2p + q - 2^2 \times m = 2p + q$, y aſſi de los demás.

3°. Que el termino (q), à que ſe reduce el Diviſor Trinomio en la ſubſtitucion de o por x, es ſiempre el tercero, ò ultimo termino, de que conſta el Diviſor Trinomio.

Con que teniendo el coeficiente (m) del primer termino, el coeficiente (p) del ſegundo, y el tercer termino (q) del Diviſor Trinomio, en el qual el primer termino es el producto de ſu coeficiente, y del quadrado de la incognita (mx^2); el ſegundo el producto de ſu coeficiente, y de la ſimple incognita (px), y el tercero la quantidad (q), à que ſe reduce el Trinomio en la ſubſtitucion de o por x, aplicando à las Equaciones eſta doctrina, que es general para encontrar el Diviſor de dos dimenſiones de qualquier quantidad compueſta, en que entran muchas dimenſiones de una miſma letra, ſale eſta Regla general en las Equaciones Superiores, para encontrar las Quadradas, de que ſe componen.

175 Regla. *Subſtituyanſe ſucceſſivamente en la Equacion dada en lugar de la incognita los terminos de la Progreſſion Arithmetica* 3, 2, 1, 0, — 1, *&c. buſquenſe todos los Diviſores de la quantidad à que ſe reduce la Equacion en*

fuerza de dichas ſubſtituciones, poniendolos en linea recta correſpondiente à los terminos ſubſtituidos. De cada uno de eſtos Diviſores quiteſe el Quadrado del reſpectivo termino ſubſtituido de la Progreſſion 3, 2, 1, 0, *&c. multiplicado eſte Quadrado por algun Diviſor numerico del Coeficiente del primer termino de la Equacion, y ponganſe las Reſtas en linea recta correſpondiente à cada termino ſubſtituido* 3, 2, *&c. Buſquenſe entre eſtas Reſtas quantas quiera Progreſſiones Arithmeticas, creſcientes, ò decreſcientes, que ſe puedan formar de arriba abaxo de ſemejantes Reſtas, y ponganſe eſtas Progreſſiones correſpondientes à la ſubſtituida* 3, 2, 1, 0, *&c.*

Eſto ſupueſto, hagaſe un Trinomio, cuyo primer termino ſea un producto del Quadrado de la incognita por el Diviſor dicho del Coeficiente del primer termino de la Equacion, el ſegundo termino ſea un producto de la diferencia reinante en la Progreſſion Arithmetica encontrada, y de la ſimple incognita, el tercero el termino, que correſponde enfrente de la ſubſtitucion de 0 *por la incognita, teniendo el ſegundo termino de eſte Trinomio el ſigno poſitivo ſi la Progreſſion es decreſciente, y negativo ſi es creſciente.*

Dividaſe la Equacion por el Trinomio aſſi pueſto. Si la diviſion ſale exacta, eſte Trinomio, hecho igual à 0, *es la Equacion Quadrada*

da de cuya multiplicacion la Equacion propuesta se compone, y el Quociente es el producto de las otras Equaciones Inferiores, cuyas Raices de entrambas son las Raices de la Equacion dada.

176 Para aclarar, y practicar esta Regla, sea esta Equacion $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0$, cuyas Raices se busquen por este methodo. Substituyendo en lugar de la incognita los terminos de la progression 3, 2, 1, 0, — 1, — 2, &c. las quantidades à que la Equacion se reduce, y sus divisores ya con signo positivo ya con signo negativo, son los siguientes

Subst.	*Res.*	*Divisores.*
3	39	13 . 3 . 1 . — 1 . — 3 . — 13 . — 39
2	6	3 . 2 . 1 . — 1 . — 2 . — 3 . — 6
1	1	..... — 1 .....
0	6	3 . 2 . 1 . — 1 . — 2 . — 3 . — 6
— 1	21	7 . 3 . 1 . — 1 . — 3 . — 7 . — 21
— 2	26	13 . 2 . 1 . — 1 . — 2 . — 13 . — 26

Teniendo ya los divisores de las quantidades, à que se reduce la Equacion en fuerza de las substituciones, quitese de cada divisor el producto del quadrado del termino substituido, y del divisor del coeficiente del primer termino de la Equacion. Pero como el coeficiente del primer termino es la unidad, cuyo unico divisor es 1, solo se habrá de quitar de cada divisor el quadrado del termino substituido. Por lo qual tendré los siguientes

Reſultados, y las Progreſſiones, que de ellos ſe forman.

		Prog. encont.	
3	30. 4. -6. —8. —10. —12. —22. —48	+4	—6
2	2. -1. -2. —3. — 5. — 6. — 7. —10	+2	—3
1	0. . . . . — 2.	0	0
0	6. 3. 2. 1. — 1. — 2. — 3. — 6	—2	+3*
-1	20. 6. 2. 0. — 2. — 4. — 8. —22	—4	+6
-2	22. 9. -2. —3. — 5. — 6. —17. —30	—6	+9

Como encuentro dos Progreſſiones, puedo formar dos Trinomios, el coeficiente del primer termino ſerá en entrambos la unidad, por ſer unicamente 1 el diviſor del coeficiente del primer termino de la Equacion. El coeficiente del ſegundo termino ſerá + 2, por ſer 2 la diferencia reinante en la progreſſion, y ſer eſta decreſciente. El tercer termino ſerá — 2, por ſer eſta quantidad la que correſponde à la ſubſtitucion de o por la incognita. Y aſſi el primer Trinomio, por quien debo probar la diviſion de la Equacion, ſerá $x^2 + 2x - 2$, y por ſemejantes razones ſerá el ſegundo Trinomio $x^2 - 3x + 3$. Pero como dividiendo por entrambos la Equacion propueſta, ſale exacto el quociente, haciendo entrambos Trinomios iguales à o, ſerán las *Equaciones Quadradas*, de cuya multiplicacion la Equacion propueſta ſe compone: luego las Raices de la Equacion propueſta ſon las dos de eſta $x^2 + 2x - 2 = 0$, y las de la otra $x^2 - 3x + 3 = 0$.

Eſte

Este methodo es de grande utilidad, especialmente quando algunas Raices de la Equacion son Incommensurables, ò Imaginarias.

Quien quiera ver estos dos Methodos ultimos largamente tratados, y demonstrados, lea la *Tercera Parte* del *lib.* 9. de los Elementos de Algebra de Saunderson.

CAPITULO XII.

Methodo para encontrar el Numero de Raices Impossibles, que tenga una Equacion.

177 ENcontradas por las Reglas precedentes todas las Raices *Commensurables*, que tiene una Equacion, si el numero de Raices encontradas es igual al exponente de la Equacion, no hai que buscar mas, pues se han encontrado ya todas sus Raices; pero si dicho numero no le es igual, las otras Raices serán *Incommensurables*, ò *Impossibles*. Pues para examinar si alguna Equacion contiene Raices *Impossibles*, y quantas, tomese la siguiente

Regla. *Formese una Série de Fracciones tantas, quantas unidades contiene el Exponente de la Equacion. Los Denominadores de estas Fracciones*

ciones ſean los numeros naturales 1, 2, 3, &c. *y los Numeradores los miſmos numeros en orden inverſo, eſto es,* 3, 2, 1. *Dividaſe cada Fraccion de eſta Série por la que la precede, y ſus Quocientes ponganſe reſpectivamente ſobre los Terminos intermedios de la Equacion, comenzando deſde el ſegundo. Si el Quadrado de alguno de los Terminos de la Equacion, multiplicado por la Fraccion que tiene encima es mayor, que el Rectangulo de los dos Terminos, que tiene à los lados, pongaſe baxo el Termino el ſigno* +; *pero ſi dicho Producto no es mayor, que el tal Rectangulo, pongaſe el ſigno* —, *y poniendo baxo los Terminos Extremos primero, y ultimo de la Equacion el ſigno* +, *habrá en la Equacion tantas Raices Imaginarias, ò Impoſſibles, quantas variaciones de* + *en* —, *ò de* — *en* + *haya en dicha Série de Signos.*

178 Sea eſta Equacion cubica $z^3 + pz^2 + 3p^2z - q = 0$, en la qual ſe quiera examinar quantas Raices *Imaginarias* haya. Como eſta Equacion es del tercer grado, ſe habrá de formar una ſérie de tres fracciones, que ſerán $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$. Dividiendo pues la ſegunda $(\frac{2}{2})$ por la primera $(\frac{3}{1})$, tendremos por quociente $\frac{1}{3}$; dividiendo la tercera $(\frac{1}{3})$ por la ſegunda $(\frac{2}{2})$, ſerá el quociente $\frac{1}{3}$. Hecho eſto, ponganſe los quocientes por ſu orden ſobre el ſegundo, y tercer termino de la Equacion de eſta ſuerte

$z^3 +$

$$z^3 + pz^{\frac{1}{3}} + 3p^{\frac{1}{3}}z - q = 0$$
$$+ \quad - \quad + \quad +$$

Multiplicando el quadrado del ſegundo termino por ſu reſpectiva fraccion, ſerá el producto $\frac{1}{3} \times p^2z^4$, y el rectangulo de los dos terminos que tiene al lado, $z^3 \times 3p^2z = 3p^2z^4$. Conſiderando pues que $\frac{1}{3}p^2z^4$ no es mayor que $3p^2z^4$, ſe habrá de poner baxo el ſegundo termino de la Equacion el ſigno —.

Aſſimiſmo multiplicando el quadrado del tercer termino, por la reſpectiva fraccion, ſerá $\frac{1}{3} \times 9p^4z^2 = 3p^4z^2$, el qual por ſer quantidad *poſitiva*, por conſiguiente mayor que o, es tambien mayor que el rectangulo de ſus dos terminos del lado, $-q \times pz^2 = -qpz^2$, que es quantidad negativa, y aſſi ſe pondrá baxo del tercer termino de la Equacion el ſigno +, y finalmente ſe pondrá + baxo los extremos, como eſtá en el Exemplo. En la linea de los ſignos hai dos variaciones, de donde ſe infiere, que en la Equacion hai *dos Raices Imaginarias*, por conſiguiente ſolo habrá una real, que ſerá Commenſurable, ò Incommenſurable. Si es Commenſurable, ſe podrá ſacar por las Reglas dadas, ſi es Incommenſurable, por las Reglas que daremos.

179 La miſma operacion ſe puede practicar en qualquier Equacion de qualquier grado que ſea; advirtiendo, que ſi en alguna Equa-

Equacion falta algun termino, ſe ſupone el tal termino ſer = o, que multiplicado por ſu reſpectiva fraccion, ſu producto ſerá tambien = o; pero ſi el rectangulo de los dos terminos del lado es quantidad negativa, ſerá dicho rectangulo menor que o, y aſſi baxo el tal termino ſe habrá de poner el ſigno +.

Si faltan dos, ò mas terminos conſecutivamente, baxo el primero de los que faltan, pongaſe el ſigno —, baxo el ſegundo el ſigno +, baxo el tercero el ſigno —, y aſſi alternando. Como ſe verá en eſta Equacion

$$z^5 + az^4 * * * + a^5 = o$$
$$+ \quad + \quad - \quad + \quad - \quad +$$

en la qual por haber quatro variaciones, ſe infiere, que hai quatro Raices impoſſibles.

Pero ſi faltando dos, ò mas terminos conſecutivamente, como en el caſo antecedente, los terminos que eſtán, entre quienes ſe contienen los que faltan, tubieſſen *diferentes* ſignos, baxo el *ultimo termino* de los que faltan, ſiempre ſe ha de poner el ſigno +. Aſſi

$$z^5 + az^4 * * * - a^5 = o$$
$$+ \quad + \quad - \quad + \quad + \quad +$$

por faltar tres terminos conſecutivos; baxo el ultimo de los que faltan ſe pone el ſigno +, porque $+ az^4$, $- a^5$, entre quienes ſe contienen los que faltan, tienen diferentes ſignos, con que no habiendo ſino dos variaciones, no habrá ſino dos Raices impoſſibles.

Eſte

Eſte Methodo, que hemos explicado, tiene por garantes à Newton, à Stirling, à las Tranſacciones Philoſophicas, y à Maclaurin, en quienes ſe podrá ver ſu Demonſtracion. Pero ſe ha de advertir, que aunque *comunmente* por eſte Methodo ſe deſcubre el numero de Raices imaginarias, que tiene una Equacion, no obſtante es fuerza confeſſar, que alguna vez, aunque rara, no ſe deſcubren todas, como lo nota, y da la razon Maclaurin §. 123.

180 Preſupueſta la noticia del numero de Raices Imaginarias, que tenga una Equacion, ſe podrán encontrar facilmente quales ſean. Si la Equacion es cubica, y quantidad real, eſto es, que no aparezca en ella quantidad alguna imaginaria, ò impoſſible, las Raices impoſſibles de la tal Equacion *no podrán ſer ſino dos*, porque en ninguna quantidad real, puede haber Raices imaginarias, ſino en numero par; luego una de las Raices de la Equacion ſerá poſsible. Encontrada eſta Raiz poſsible por las Reglas dadas, ſi es commenſurable, ò por las que daremos, ſi es incommenſurable, dividiendo toda la Equacion por la Equacion ſimple formada por la incognita, y la tal Raiz con ſigno contrario, el quociente ſerá una Equacion quadrada, cuyas Raices ſerán las Imaginarias de la cubica propueſta.

Si la Equacion es Biquadrada, las Raices Imaginarias ſerán ò quatro, ò dos, ò ninguna.

na. Si ſolo hai dos, las otras dos ſerán Reales; con que encontrando eſtas dos reales, y formando de ellas con la incognita una Equacion quadrada, eſta Equacion quadrada ſerá uno de los factores de la Equacion biquadrada; luego dividida eſta por aquella, el quociente ſerá otra Equacion tambien quadrada, cuyas dos Raices ſerán las dos imaginarias de la Equacion propueſta.

Finalmente ſi las quatro Raices de la Equacion biquadrada ſon Imaginarias, ſe habrá de reducir dicha Equacion à ſus factores, que ſon dos Equaciones quadradas, que entrambas tendrán ſus dos Raices imaginarias; con que encontradas eſtas dos Equaciones, y reſolviendolas por el methodo de las Equaciones quadradas, ſe encontrarán ſus Raices. De la miſma ſuerte ſe diſcurre, ſi las Equaciones fueſſen de quinto, ſexto grado, &c. Pero como las Raices Imaginarias ſon quantidades impoſsibles, una vez que ſe encuentran, ſirven de poco, ò nada, excepto para la formacion de las Curvas, como ſe verá en ſu lugar.

CAPI-

CAPITULO XIII.

Methodos para encontrar por aproximacion las Raices de las Equaciones.

181 EN los Capitulos antecedentes hemos explicado, como ſe han de encontrar las Raices Commenſurables, y el Numero de las Impoſsibles, que tenga qualquiera Equacion; y aſſi ſolo nos falta tratar de las Incommenſurables, las quales ſolamente por aproximacion ſe pueden encontrar; pero por los Methodos que daremos, ſe aproximan tanto, que *apenas* ſe diferencian de la Exactitud.

Para uſar de eſtos Methodos ſe han de encontrar primeramente los limites entre cada Raiz, y ſe han de ir eſtrechando (lo que ſe hace aumentando el inferior, y diſminuyendo el ſuperior) haſta que lleguemos à dos quantidades, que ſiendo limites de la Raiz ſe excedan en ſola la unidad.

Primer Methodo.

182 Eſte Methodo conſiſte en eſtrechar los limites de tal ſuerte, que ſiendo la diferencia

184 Aplicando eſte methodo à las Raices de la Equacion quadrada $z^2 - 6z + 7$, cuyos limites ſon 0, 3, y 7, ſe encuentra la primera entre $1\frac{9}{16}$, y $1\frac{10}{16}$, eſto es, entre 1.5625, y 1.625; por lo tanto ſe puede tomar por Raiz 1.5935. Pero reſolviendo dicha Equacion por el methodo de las quadradas, tenemos $z = 3 \pm \sqrt{2} = 3 \pm 1.41421$, &c. eſto es, $z = 1.58579$, &c. primera Raiz, $z = 4.41421$, &c. ſegunda Raiz; de donde ſe ve, que la primera Raiz, encontrada por el Methodo comun ſolo ſe diferencia en .00771, de la encontrada por el Methodo ſobredicho; pero ſi ſe proſiguieſſe la operacion, ſe iria mas acercando à la Exactitud.

Segundo Methodo.

185 Si las Raices de una Equacion dada ſe multiplican por 10, 100, &c. (num. 112.) ò lo que es lo miſmo, ſe transforma dicha Equacion en otra, cuyas Raices ſean iguales à las de la propueſta, *multiplicadas* por alguna potencia de 10, los limites de la Equacion que reſulte, ſerán iguales à los de la propueſta, multiplicados por dicha quantidad; luego ſiendo los limites de alguna Raiz de una Equacion dada, por exémplo, 1, y 2 (como lo ſon los de la primera Raiz de la Equacion $z^2 - 6z + 7 = 0$), los de la miſma Raiz en la tranſforma-

formada que resulta, multiplicando las Raices de la propuesta por 10, serán 10, y 20, multiplicando dichas Raices por 100, serán 100, y 200; pero como entre 1, y 2 no se comprehende entero alguno; entre 10, y 20 se comprehenden 9, y entre 100, y 200 hai 99. De ahí inferimos, que mas se podrán estrechar los limites (con solos enteros) en la ultima transformacion, que en la otra, y mucho mas que en la Equacion propuesta; por consiguiente por medio de estas transformaciones facilmente nos acercaremos à la Exactitud.

Encontrados pues los limites en la transformada, que solo se diferencien en la unidad; cada uno de estos dividido por la potencia de 10, que se ha tomado para la transformacion, tanto mas se acercará à la Raiz de la Equacion propuesta, quanto mayor sea dicha potencia de 10.

186 Assi transformando la Equacion $z^2 - 6z + 7 = 0$ en otra, cuyas Raices sean iguales à las de la propuesta multiplicadas por 100, tendremos $x^2 - 600x + 70000 = 0$; y estrechando los limites 100, y 200, hallaremos que una de las Raices de esta Equacion se encuentra entre 158, y 159, y assi una de las Raices de la Equacion propuesta será $\frac{158}{100} = 1.58$, y algo mas.

Tercer Methodo.

187 Para encontrar las Raices Incommenſurables de una Equacion con una exactitud caſi infinita, tomeſe, por exemplo, la Equacion cubica $z^3 - 15z^2 + 63z - 50 = 0$, que teniendo tres variaciones de ſignos, todas ſus Raices ſerán poſitivas. Atendiendo pues à lo que diximos num. 147, los limites de eſta Equacion ſerán las Raices de la quadrada $3z^2 - 30z + 63 = 0$, que ſon 3, y 7; de donde la primera Raiz de la Equacion cubica propueſtá ſe contendrá entre 0, y 3; la ſegunda entre 3, y 7; y la tercera entre 7, y 51.

Subſtituyendo pues 0 en lugar de la incognita, reſulta -50. Subſtituyendo 1, ſu reſultado, ò ſuma es -1. Subſtituyendo 2, reſulta $+24$; luego la primera Raiz ſe contiene entre 1, y 2.

188 Eſto ſupueſto, ſerá la tal Raiz $1 +$ una fraccion, que ſupongo a, luego $z = 1 + a$. Subſtituyendo pues el valor de z en la Equacion propueſta, tendremos

$$\begin{array}{rl} z^3 = & 1 + 3a + 3a^2 + a^3 \\ -15z^2 = & -15 - 30a - 15a^2 \\ +63z = & +63 + 63a \\ -50 = & -50 \\ \hline z^3 - 15z^2 + 63z - 50 = & -1 + 36a - 12a^2 + a^3 = 0 \end{array}$$

Co-

Como a es fraccion propria, ſu quadrado, y ſu cubo ſerán quantidades mui tenues, y aſſi deſpreciando los terminos, en que dichas potencias ſe encuentren, ſe reducirá la nueva Equacion à eſta $-1+36a=0$, de donde $36a=1$, $a=\frac{1}{36}=0.027$ &c. Pero $x=1+a$, luego ſubſtituyendo el valor encontrado de a, ſerá $x=1.027$ &c.

189 Teniendo ya eſte valor de a, que es la diferencia de la primera Raiz ſobre la unidad (1), aun podemos acercarnos mas à ſu valor exacto, pues ſiendo $-1+36a-12a^2+a^3=0$, tendremos $36a-12a^2+a^3=1$, luego $a=\frac{1}{36-12a+a^2}$, y ſubſtituyendo en el denominador en lugar de a ſu valor $(\frac{1}{36})$ arriba encontrado, tambien tendremos $a=\frac{1}{36-12\times\frac{1}{36}+(\frac{1}{36})^2}=\frac{1296}{46225}=0.02803$, por conſiguiente $x=1+a=1.02803$, valor ya mas exacto que el antecedente.

190 Pero eſte valor (.02803 &c.) de a, no ſiendo del todo exacto, puede llegar aun à mayor exactitud, ſuponiendo la diferencia de eſte valor al verdadero $=b$, de manera que $a=.02803+b$. Subſtituyendo dicho valor de a en la Equacion $-1+36a-12a^2+a^3=0$, ſe encontrará el valor de b, que añadido à .02803 dará aun con mas exactitud el valor de $x=1+a$; y aſſi proſiguiendo de eſta ſuer-

te se puede llegar à tal exactitud de la Raiz Incommensurable, que apenas se diferencie de la verdadera.

191 Encontrada ya por aproximacion la primera Raiz, passemos à la segunda, que se debe encontrar entre 3, y 7; estrechando los limites se encuentra ser $z = 6 +$ *la diferencia de 6 à la segunda Raiz*. Supuesta pues esta diferencia $= a$, como en el caso antecedente, tendremos $z = 6 + a$. Substituyendo dicho valor en lugar de la incognita, resulta $a^3 + 3a^2 - 9a + 4 = 0$; de donde despreciando los terminos, en que se encuentra el quadrado, y el cubo de a, será $-9a + 4 = 0$, $9a = 4$, $a = \frac{4}{9}$. Por lo tanto $z = 6 + a = 6\frac{4}{9} = 6.4444$ &c.

Volviendo à tomar la Equacion $a^3 + 3a^2 - 9a + 4 = 0$, mudandole los signos, tendremos $-a^3 - 3a^2 + 9a - 4 = 0$, $9a - 3a^2 - a^3 = 4$, $a = \frac{4}{9 - 3a - a^2}$, y substituyendo en el denominador el valor de a $(\frac{4}{9})$ arriba encontrado, será $a = \frac{4}{9 - \frac{4}{3} - \frac{16}{81}} = \frac{324}{605}$; de donde $z = 6 + a = 6\frac{324}{605} = 6.53553$ &c. y este valor aun se podrá mucho mas acercar al exacto. De la misma suerte nos podremos acercar al valor de la otra Raiz.

192 En fin para lograr una Formula, que nos exprima el valor de a en las Equaciones del tercer grado, sea esta Equacion $a^3 - pa^2$

$+qa-r=0$, significando p, q, r qualesquiera coeficientes; despreciando pues los dos primeros terminos, tendremos $qa-r=0$, $qa=r$, $a=\frac{r}{q}$. Encontrado este valor de a, substituyendolo en lugar de a en la otra Equacion, en que nada se desprecia, tendremos

$$a\left(=\frac{r}{a^2-pa+q}=\frac{r}{\frac{r^2}{q^2}-p\frac{r}{q}+q}\right)=\frac{rq^2}{q^3-pqr+r^2}$$

Formula, que exprime el valor de a en las Equaciones del tercer grado.

Para semejante diferencia a en las Equaciones del quarto grado, tomemos $a^4-pa^3+qa^2-ra+s=0$, y despreciando en la primera operacion los tres primeros terminos, será $-ra+s=0$, $ra=s$, $a=\frac{s}{r}$. Corrigiendo mas este valor, será $a=\frac{s}{r-qa+pa^2-a^3}$, substituyendo en el denominador el valor primero de a, es à saber $\frac{s}{r}$, tendremos

$$a\left(=\frac{s}{r-q\frac{s}{r}+p\frac{s^2}{r^2}-\frac{s^3}{r^3}}\right)=\frac{sr^3}{r^4-qsr^2+ps^2r-s^3}$$

por Formula de la diferencia a en las Equaciones del quarto grado, y de la misma suer-

te ſe podrán ſacar Formulas generales para la miſma diferencia en las demás Equaciones ſuperiores.

Eſtos Methodos dados haſta aquí para la *Reſolucion de Equaciones*, ò para encontrar ſus Raices ſean eſtas *Commenſurables*, ſean *Incommenſurables*, ſon generales para qualeſquiera Equaciones poſſibles de qualquier grado que ſean.

CAPITULO XIV.

Methodos particulares para la Reſolucion de las Equaciones del Tercero, y Quarto Grado.

193 LOS Methodos de las Equaciones dados haſta aquí ſon generales, como hemos dicho, para toda eſpecie de Equaciones; por conſiguiente por lo comun ſe deben preferir à otros Methodos, que ſolo ſe eſtienden à Equaciones de algun grado particular, no obſtante para algunos caſos ſon tal vez eſtos mas utiles; por lo tanto pondré aquí uno de Cardano para las Equaciones del *Tercer Grado*, y otro de Carteſio para las Equaciones del *Quarto Grado*, que ſon las que comunmente ſuelen ocurrir.

Methodo

Methodo de Cardano.

194 Para conocer la formacion de eſte Methodo, y la Formula, que de él reſulta, tomeſe eſta Equacion cubica $x^3 + ax = b$, à quien le falta el ſegundo termino (y ſi lo tubieſſe, ſe le habria de hacer deſaparecer) ſignifiquen a, y b qualeſquiera quantidades.

Eſto ſupueſto, hagaſe la incognita de la Equacion x igual à la *ſuma* de otras dos incognitas $x = z + y$, y ſubſtituyendo en la Equacion dada en lugar de x ſu valor, tendremos $(z+y)^3 + a(z+y) = b$, eſto es, $z^3 + 3z^2y + 3zy^2 + y^3 + a(z+y) = b$, ò bien pueſta de otra ſuerte $z^3 + y^3 + 3zy \times (z+y) + a(z+y) = b$.

Ahora pues ſi ſe toma a, que ſea una quantidad tal, que $3zy = -a$, $zy = -\frac{a}{3}$, poniendo en lugar de $3zy$ ſu valor, los terminos $3zy \times (z+y)$, $a \times (z+y)$ mutuamente ſe deſtruirán, y la Equacion $z^3 + y^3 + 3zy \times (z+y) + a \times (z+y) = z^3 + y^3 = b$; del *quadrado* de eſta ultima quitando el *quadruplo del cubo* de $zy = -\frac{1}{3}a$, tendremos $y^6 - 2y^3z^3 + z^6 = b^2 + \frac{4a^3}{27}$, ſacando la Raiz de ambos miembros, ſerá $y^3 - z^3 = \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}}$, que añadida à

la

la de arriba $y^3 + z^3 = b$, nos dará $2y^3 = b + \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}}$, y quitada de la misma Equacion, resultará $2z^3 = b - \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}}$; finalmente

$$y = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} = \left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$z = \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} = \left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}};$$

substituyendo pues estos valores en la Equacion $x = z + y$, tendremos

$$x = \left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}};$$

ò bien para acomodar mejor esta expresion para la practica, supuesto $zy = -\frac{1}{3}a$, será

$$z\left(= -\frac{\frac{1}{3}a}{y}\right) = -\frac{\frac{1}{3}a}{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}}.$$ Por lo tanto tendremos $x = \left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{\frac{1}{3}a}{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}}$.

Para confirmar esto con algun Exemplo sea esta Equacion $y^3 + 3y^2 + 9y = 13$, cuyas Rai-

Raices ſe buſquen por eſte Methodo. Teniendo aun eſta Equacion el ſegundo termino, para quitarſelo, transformeſe en otra, haciendo $y = x - 1$, y ſerá $(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 9(x-1) = 13$, eſto es, $x^3 + 6x = 20$, la qual; cotejandola con la Equacion de la Formula, nos dará $a = 6$, $b = 20$, por conſiguiente

$$x = \left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{\frac{1}{3}a}{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= (10 + \sqrt{100 + 8})^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{(10 + \sqrt{100 + 8})^{\frac{1}{3}}}$$

$$= (20.3923)^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{(20.3923)^{\frac{1}{3}}} = 2.732 - 0.732.$$

$= 2$; aſſi la Raiz de la Equacion dada ſerá: $y (= x - 1) = 1$.

Eſte es el Methodo, que llaman *de Cardano*, para las Equaciones del *Tercer Grado*, ſi bien (como el miſmo Cardano confieſſa) es de un celebre Mathematico llamado *Scipio Ferreus*. Pero ya ſe ve, que eſte Methodo ſolo da *una* de las Raices de la Equacion, y aſſi para las demás ſe habrá de recurrir à la reduccion de la tal Equacion à otra del ſegundo grado, dividiendo la Equacion dada, por la Equacion ſimple ſu factor, compueſta de la incognita, y de la Raiz encontrada con ſigno contrario.

Metho-

Methodo de Carteſio.

195 El Methodo de Carteſio para reſolver las Equaciones del *Quarto Grado* ſupone, como el de Cardano para las del *Tercero*, que la Equacion eſtá ya ſin el ſegundo termino; por lo tanto ſi la Equacion dada lo tubieſſe, ſe le habria de quitar.

Sea pues la Equacion, cuyas Raices por eſte Methodo ſe buſcan, eſta $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$, ſignificando a, b, c qualeſquiera cantidades poſitivas, ò negativas. Conſiderando eſta Equacion como producto de dos Equaciones del *Segundo Grado* (*pag.* 65.) ſerán ſus factores $x^2 + px + q = 0$, y $x^2 + rx + s = 0$, con tal que eſtos coeficientes p, q, r, s ſignifiquen las cantidades, que para eſto ſe requieren, pues la incognita, y ſus potencias ſon las miſmas.

Eſto ſupueſto, ſerá $x^4 * + ax^2 + bx + c = (x^2 + px + q) * (x^2 + rx + s)$.

Haciendo la operacion à la larga, tendremos

$$x^4 + \left.\begin{matrix} p \\ r \end{matrix}\right\} \times x^3 + \left.\begin{matrix} s \\ q \\ pr \end{matrix}\right\} \times x^2 + \left.\begin{matrix} ps \\ qr \end{matrix}\right\} \times x + qs =$$
$$x^4 * + ax^2 + bx + c.$$

Supueſto pues, que entrambos miembros ſon iguales, y ſe encuentra en entrambos la miſma incognita en las miſmas potencias, ſerán

serán tambien iguales los *Coeficientes homologos* de entrambas partes, por consiguiente será $p+r=0$, $s+q+pr=a$, $ps+qr=b$, $qs=c$; de donde tendremos $p=-r$, $s+q(=a-pr)=a+p^2$, finalmente $s-q=\frac{b}{p}$ (por ser $p=-r$).

Quitando pues el quadrado de esta ultima Equacion del quadrado de la penultima, será $4sq=a^2+2ap^2+p^4-\frac{b^2}{p^2}$, esto es (por ser $c=qs$), $4c=a^2+2ap^2+p^4-\frac{b^2}{p^2}$, de donde $p^6+2ap^4\left.\begin{matrix}+a^2\\-4c\end{matrix}\right\}\times p^2=b^2$, que reducida al *Tercer Grado*, haciendo $p^2=z$, dará el valor de p, por el qual se conocerá el de $s\left(=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}p^2+\frac{b}{2p}\right)$, el de $q\left(=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}p^2-\frac{b}{2p}\right)$, y el de $r(=-p)$.

196 Conociendo pues el valor de los coeficientes de estas dos Equaciones $x^2+px+q=0$, $x^2+rx+s=0$, sacando las Raices de entrambas, estas serán las Raices de la Equacion dada, por ser las Raices de los factores las de su Equacion compuesta. Por lo tanto la primera nos da $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{pp}{4}-q\right)}$, la segunda $x=-\frac{r}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{rr}{4}-s\right)}=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{pp}{4}-s\right)}$, por ser $r=-p$, y assi las *quatro* Raices de la Equa-

Equacion dada del *Quarto Grado* $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$, que ſon las miſmas que las de ſus factores las del ſegundo, ſerán

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - s\right)} \qquad x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - q\right)}$$

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - s\right)} \qquad x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - q\right)}$$

197 Para exercitar eſte Methodo con algun Exemplo, ſea eſta Equacion $y^4 - 4y^3 - 8y + 32 = 0$, cuyas Raices ſe buſcan. Como eſta Equacion aun tiene el ſegundo termino, para quitarſelo, ſe habrá de hacer $x + 1 = y$, por la transformacion reſultará $x^4 * - 6x^2 - 16x + 21 = 0$, que cotejandola con la Equacion general antecedente, nos dará $a = -6$, $b = -16$, $c = 21$, por conſiguiente $p^6 - 12p^4 - 48p^2 \left(= p^6 + 2ap^4 \left\{\begin{matrix} +a^2 \\ -4c \end{matrix}\right\} p^2\right) = 256 \left(= b^2\right)$, en la qual por las Reglas de las Equaciones del *Tercer Grado*, ſerá $p = 4$, por lo tanto

$$s \left(= \frac{a}{2} + \frac{p^2}{2} + \frac{b}{2p}\right) = -\frac{6}{2} + \frac{16}{2} - \frac{16}{8} = 3,$$

$$q \left(= \frac{a}{2} + \frac{p^2}{2} - \frac{b}{2p}\right) = -\frac{6}{2} + \frac{16}{2} + \frac{16}{8} = 7, \text{ y}$$

aſſi $\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - s\right)} = 3$, $\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - s\right)} = 1$, $-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - q\right)} = -2 + \sqrt{-3}$, $-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - q\right)} = -2 - \sqrt{-3}$, que ſerán las qua-

tro

tro Raices de la transformada $x^4 - 6x^2 - 16x + 21 = 0$, ò los quatro valores de x; pero $x + 1 = y$, luego añadiendo 1 al valor de las quatro Raices encontradas, tendremos por las quatro Raices de la Equacion dada $y^4 - 4y^3 - 8y + 32 = 0$ las siguientes cantidades $4, 2, -1 + \sqrt{-3}, -1 - \sqrt{-3}$, de las quales las dos ultimas son imaginarias, por ser tal $\sqrt{-3}$, y las otras dos son reales.

Pero para mas asseguarse, si estas son las Raices de la Equacion dada, formense de ellas las Equaciones simples $y - 4 = 0$, $y - 2 = 0$, $y + 1 - \sqrt{-3} = 0$, $y + 1 + \sqrt{-3} = 0$, que multiplicadas, vease si dan la Equacion propuesta $y^4 - 4y^3 - 8y + 32 = 0$, pues esta es la prueba fundamental.

Problemas resueltos por el Methodo de Cardano.

198 PROBLEMA I. *Dado el Rectangulo* (a), *y la Suma de los Cubos* (b) *de dos Numeros, encontrar tales Numeros.*

Sea x el Numero mayor, y el menor, será su Rectangulo $xy = a$, la Suma de sus Cubos $x^3 + y^3 = b$, que cubando la primera, y quadrando la segunda $x^3y^3 = a^3$, $x^6 + 2y^3x^3 + y^6 = b^2$, quitando de esta segunda el quadruplo de la primera, queda $x^6 - 2y^3x^3 + y^6 = b^2 - 4a^3$, sacando la Raiz de entrambos miembros

bros $x^3 - y^3 = \sqrt{(b^2 - 4a^3)}$, que añadida à la Equacion $x^3 + y^3 = b$, dará $2x^3 = b + \sqrt{(b^2 - 4a^3)}$, finalmente $x = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a^3})}$, que ſubſtituido en el valor de $y\,(=\frac{a}{x})$ dará $y = \frac{a}{\sqrt[3]{(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a^3})}}$ *los dos Numeros que ſe buſcan.*

De otra ſuerte. Supueſto que $xy = a$, ſerá $y = \frac{a}{x}$, $y^3 = \frac{a^3}{x^3}$, que ſubſtituido en $x^3 + y^3 = b$, tendremos $x^3 + \frac{a^3}{x^3} = b$, de donde $x^6 + a^3 = bx^3$, tranſponiendo, ſerá $x^6 - bx^3 = -a^3$, completando el quadrado, tendremos $x^6 - bx^3 + \frac{b^2}{4}\left(=\frac{b^2}{4} - a^3\right) = \frac{b^2 - 4a^3}{4}$, ſacando la Raiz quadrada de entrambos miembros, queda $x^3 - \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4a^3}{4}}$, por lo tanto ſerá $x = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a^3})}$, que ſubſtituido en la Equacion $y = \frac{a}{x}$, dará el miſmo valor de y, que arriba.

199 De qualquiera de las dos Reſoluciones ſe puede ſacar un Methodo mui ſemejante al que arriba dimos de Cardano, para la Reſolucion de las Equaciones del Tercer Grado; porque haciendo $z = x + y$, levantando

do entrambos miembros à la tercera potencia, tendremos $z^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy \times (x+y) = x^3 + y^3 + 3a \times z$ (ſubſtituyendo a por ſu igual xy, z por ſu igual $x+y$) que tranſponiendo nos da $z^3 - 3az (= x^3 + y^3) = b$. Pero arriba vimos, que z (Raiz de eſta Equacion) es igual à $x+y$, luego poniendo en lugar de eſtas dos quantidades los valores arriba encontrados, ſerá

$$z = \sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a^3}\right)} + \frac{a}{\sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a^3}\right)}}$$

el qual valor por conſiguiente es la Raiz de eſta Equacion del tercer grado $z^3 - 3az = b$, faltandole el ſegundo termino.

De aquí ſe ve tambien, que la Raiz de eſta Equacion $z^3 + cz = b$, en que el ſegundo termino del primer miembro es *poſitivo*, ſe encontrará por un methodo ſemejante; porque haciendo $-3a = c$, ſerá $a = -\frac{c}{3}$, que ſubſtituido en la expreſſion antecedente, tenemos

$$z = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{c}{3}}^3} - \frac{\frac{1}{3}c}{\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{c}{3}}^3}}$$

à cuyas Formulas de la Raiz de las Equaciones del tercer grado, reduciremos los Problemas ſiguientes.

PRO-

200 PROBLEMA II. *Dada la Diferencia de dos Numeros 4, y la Suma de sus Cubos 2240, determinar los Numeros.*

Sea v la mitad de la Suma de tales Numeros, d la mitad de la Diferencia, será el Numero mayor $v+d$, el menor $v-d$, la Suma de sus Cubos $(v+d)^3+(v-d)^3=2240$, esto es, borrando los terminos, que mutuamente se destruyen $2v^3+6d^2v=2240$, de donde $v^3+3d^2v=\frac{2240}{2}$. Para arreglar la Raiz de esta Equacion à la Formula universal, siendo el segundo termino del primer miembro positivo, hagase $c=3d^2\,(=12)$, $b=\frac{2240}{2}=1120$, y tendremos $v^3+cv=b$, de donde

$$v=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{c}{3}}^3}-\frac{\frac{1}{3}c}{\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{c}{3}}^3}}$$

$=10$, por consiguiente el *Numero mayor* $v+d=12$, el *menor* $v-d=8$, los *Numeros que se buscan.*

201 PROBLEMA III. *Dividir el Numero 24 (2a) en dos Partes tales, que la Diferencia de sus Cubos sea 3584 (2b).*

Sea la mitad de la Diferencia de las Partes v, será la mayor $a+v$, la menor $a-v$, la Diferencia de sus Cubos $(a+v)^3-(a-v)^3=$

$2b$,

$2b$, esto es, $6a^2v + 2v^3 = 2b$; de donde $v^3 + 3a^2v = b$. Para arreglar su Raiz à la Formula general, y abreviar terminos, hagase $c = 3a^2$, $\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{c}{3}^3}} = r$, serâ $v^3 + 3a^2v = v^3 + cv = b$, finalmente $v = r - \frac{\frac{1}{3}c}{r} = 4$, de donde la *Parte mayor* $a + v = 16$, la *Parte menor* $a - v = 8$, *Partes de 24 que se buscan.*

CAPITULO XV.

De los Problemas Indeterminados.

202 LO que hasta aquí hemos explicado me parece ser suficiente para la inteligencia de los Problemas Determinados; pues de qualquier Grado que sean se podrán resolver por las Reglas dadas. En este Capitulo daremos una succinta noticia de los Indeterminados, que tambien se llaman *Ilimitados*, por ser capaces de infinidad de soluciones; por cuyo motivo aunque podamos encontrar el valor de las incognitas en el Problema Indeterminado, suponiendo arbitrariamente un valor conocido à alguna de ellas, no obstante no es facil resolver la Equacion;

cion; pues à veces no todos los valores, que se pueden dar à las incognitas convienen à las condiciones de la Question.

Pero para encontrar el numero de soluciones en solos Enteros, que tenga el Problema Indeterminado

203 LEMMA. *Si* $\frac{ax \pm b}{c}$ *es una fraccion, reducida à la menor expression que se pueda, siendo* x *quantidad indeterminada, y* a, b, c *numeros enteros, el inferior, ò mas pequeño valor entero de* x, *que haga la fraccion* $\frac{ax \pm b}{c}$ *un Entero se encontrará por esta*

Regla. *Dividase el Denominador* c *por el Coeficiente* (a) *de la indeterminada* (x), *dividase despues el Divisor por la Resta, y prosigase assi dividiendo el ultimo Divisor por la ultima Resta, hasta que solo quede la Unidad.*

Ponganse todos los Divisores por su orden en una linea, y baxo el primero pongase la unidad (1), *baxo el segundo Divisor pongase el primero, multipliquense estos dos segundos de linea superior, è inferior entre sí, y añadiendo al Producto el primero de la segunda linea* (ò la Unidad, que es lo mismo) *pongase su Suma baxo el tercero de la primera linea. Multipliquese el tercero de la primera linea con el de la segunda, y añadiendo al Producto el segundo termino de la linea inferior, se pondrá su Suma ba-*

baxo el quarto de la primera linea. Proſigaſe de eſta ſuerte multiplicando los dos terminos correſpondientes precedentes de la primera, y ſegunda linea, y añadiendo el immediato de la linea inferior, mientras haya Terminos en la linea ſuperior.

Multipliqueſe eſte ultimo Termino encontrado por la abſoluta quantidad (b), *que eſtá en el Numerador de la Fraccion, y divídaſe ſu Producto por el Denominador, la Reſta de la diviſion, ſerá el menor valor de* x *que ſe buſca, con tal que el numero de Terminos de la linea ſuperior, ò de los Quocientes ſea par, y el Signo de* b *negativo, ò que el numero de Terminos de la linea ſuperior ſea impar, y el Signo de* b *poſitivo.*

Pero ſi el numero de Terminos de la linea ſuperior es par, y el Signo de b *afirmativo, ò al contrario, la Diferencia entre la Reſta, y el Denominador de la Fraccion, ſerá el valor buſcado de* x, *ò el entero mas pequeño, que ſubſtituido por* x *hará la Fraccion un Entero.*

Eſta Regla la veremos practicada en los Exemplos ſiguientes.

204 Exemplo 1. *Buſqueſe qual ſea el menor Entero, que ſubſtituido por* x *en eſta Fraccion* $\frac{87x - 50}{256}$, *haga que la tal Fraccion ſea un Entero.*

Reduciendo eſta fraccion à la general de

arriba $\frac{ax-b}{c}$, será $a=87$, $b=50$, $c=256$, y obrando segun la Regla, será la operacion la siguiente.

87)256(2
82)87(1
5)82(16
2)5(2
1

2, 1, 16, 2
1, 2, 3, 50, 103
x 50
256)5150(20
Resta 30 = x.

Substituyendo pues 30 por x, será $\frac{87x-50}{256}$ = 10, Entero. Substituyendo 20, tendremos $\frac{87x-50}{256} = 6\frac{77}{128}$, Mixto. Substituyendo 3, será $\frac{211}{256}$, Quebrado.

205 Exemplo 2. *Busquese lo mismo en esta Fraccion* $\frac{71x+10}{89}$.

71)89(1
18)71(3
17)18(1
1

1, 3, 1
1, 1, 4, 5
x 10
Resta 50 = x.

Como 50 no se puede dividir por el denominador 89, es 50 el numero, que queda sin poderse dividir, y assi es *Resta*.

Exem-

206 Exemplo 3. *Buſquese lo miſmo en eſta Fraccion* $\frac{377x - 250}{450}$.

377)450(1 — 1, 5, 6
73)377(5 — 1, 1, 6, 37
12)73(6 — x 250
1 — 1850
74
450)9250(20
250
450
Diferencia 200 = x.

207 Exemplo 4. *Buſquese lo miſmo en eſta Fraccion* $\frac{987x + 651}{1235}$.

Operacion. 1, 3, 1, 48, 1, 1
1, 1, 4, 5, 244, 249, 493
987)1235(1 — x 651
248)987(3 — 1235)320943(259
243)248(1 — 7394
5)243(48 — 12193
3)5(1 — 1078
2)3(1 — 1235
1 *Dif.* 157 = x.

208 En eſtos quatro Exemplos ſe contienen los quatro caſos, de que ſe habla en el

ultimo de la Regla, en la qual, como tambien en los Exemplos ſuperiores ſe ha de advertir, que para que la Regla tenga lugar ſe ha de ſuponer, que a es menor que c, y que eſtos dos numeros ſon *primeros entre sí*, porque ſi ſe admite alguna medida, por la qual b no ſe pueda dividir, es impoſſible encontrar algun entero, que ſubſtituido por x haga la fraccion $\frac{ax \pm b}{c}$ un entero. La razon de eſto, como del precedente Lemma, ſe puede ver en Simpſon, *pag.* 190.

Propueſta eſta doctrina, ſe verá ſu uſo en el ſiguiente

209 PROBLEMA. *Dado el Problema indeterminado* $9x + 13z = 2000$, *encontrar todos los valores de* x, z *en Enteros poſitivos.*

Tranſponiendo $13z$, y dividiendo toda la Equacion por 9, tenemos $x = \frac{2000 - 13z}{9} = 222 - z + \frac{2 - 4z}{9}$, el qual ultimo miembro, quando x es entero poſitivo, es neceſſario por la igualdad, que ſea un numero entero poſitivo, por conſiguiente tambien $\frac{4z - 2}{9}$ lo ha de ſer. Haciendo pues en eſta fraccion la operacion preſcrita por el Lemma, encontraremos el menor entero valor de z, que ſerá $= 5$, el qual ſubſtituido en la Equacion ſuperior

rior en lugar de z, nos dará el *mayor* valor de $x = 222 - 5 + \frac{2-20}{9} = 215$.

Encontrado pues ya que el *menor* valor entero de z es $= 5$, y el *mayor* valor de x es $= 215$, facilmente ſe encuentran los demás de cada una (que en eſte caſo ſon 16 en numero). *Añadiendo* al menor valor de z el coeficiente de x (que es 9) ſe irán formando los demás valores de z, y *quitando* del mayor valor de x el coeficiente de z (13), ſe irán formando los demás valores de x, como en eſta Tabla, que da todas las reſpueſtas en enteros poſitivos, que tiene el Problema dado.

$x = 215.202.189.176.163.150.137.124.111.$
$z = \quad 5. \ 14. \ 23. \ 32. \ 41. \ 50. \ 59. \ 68. \ 77.$

$x = 98.85. \ 72. \ 59. \ 46. \ 33. \ 20. \ 7.$
$z = 86.95.104.113.122.131.140.149.$

210 Atendiendo pues à la Reſolucion dada de eſte Problema, que en alguna manera puede ſervir de norma à los demás Problemas Indeterminados, que tengan unicamente dos incognitas, ſe ve, que quando ſe preſente algun Problema ſemejante para reſolverlo, ſe ha de procurar, que una de las incognitas paſſe à la otra parte, y forme una fraccion ſemejante à la del Problema. En eſta fraccion ſe ha de encontrar el *menor* valor de la tal incogni-

cognita, el qual ſubſtituido da el *mayor* valor de la otra.

Encontrado el menor valor de la una (z), *y el mayor de la otra* (x), *los demás valores ſe encuentran, añadiendo el Coeficiente de* x *al menor valor de* z *para formarle ſus valores, y quitando ſucceſſivamente al mayor valor de* x *el Coeficiente de* z *para formarle à* x *los ſuyos.*

Se ve mas, *que ſi el mayor valor de* x *ſe divide por el Coeficiente de* z, *la Reſta de eſta diviſion ſerá el menor valor de* x, *y el Quociente* + 1 *ſerá el total numero de valores, que cada incognita tiene en la Equacion, ò el numero de reſpueſtas en Enteros del Problema indeterminado.* Aſſi en el Problema propueſto, dividiendo el mayor valor de x, que es 215 por el coeficiente de z, que es 13, la reſta es 7, que es el menor valor de x, y el quociente 16, que + 1, ſerá 17 total de las reſpueſtas en enteros poſitivos del Problema.

211 Pero es bien que advirtamos, que quanto hemos dicho ſolo tiene lugar, quando los coeficientes de las dos incognitas ſon *numeros primeros entre sí.* Por lo tanto ſi ſe preſentaſſe otra Equacion, en la qual tales coeficientes tubieſſen otra comun medida, que la unidad, ò fueſſen Numeros entre sí Compueſtos, lo primero de todo ſe habria la Equacion propueſta de reducir à otra en la qual tales coeficientes fueſſen *entre sí primeros,*

ros, cuya operacion es facil, pues toda ella consiste en dividir tales coeficientes por su mayor comun medida, y sus quocientes ya serán numeros entre sí primeros, y tendrá lugar la Regla dicha.

Esto baste para alguna noticia de la Resolucion de los Problemas Indeterminados, en que solo hubiesse dos incognitas. Quien quiera ver este punto tratado mas à la larga, especialmente quando en la Equacion hubiesse tres, ò mas incognitas, lea à Simpson en sus Elementos de Algebra, *Sect.* 13. de donde hemos sacado la doctrina, que damos aquí.

CAPITULO XVI.

De las Séries.

ARTICULO PRIMERO.

De las Séries en comun.

212 UNA de las cosas, que mas ocurren en la Geometría Superior, son las Séries. Por nombre de *Série* se entiende una seguida de Terminos separados unos de otros con el signo +, ò —, ò entrambos pro-

promiſcuamente. Eſtas Séries ſe dividen 1°. en *Finitas*, è *Infinitas*. Las Séries finitas ſon las que conſtan de un determinado, ò finito numero de terminos, cuya ſuma exprime exactamente el valor de una quantidad.

Aſſi haciendo la diviſion, que indica eſta expreſſion $\frac{a+b}{a^2-\frac{1}{2}b}$, el quociente tendrá muchos terminos ſeparados unos de otros con dichos ſignos, por conſiguiente ſerá una Série. Si eſte quociente llegaſſe à ſer abſolutamente exacto, de manera que no hubieſſe reſta alguna, ò lo que es lo miſmo, multiplicado por el diviſor, ſu producto fueſſe el dividendo $a+b$, eſta Série ſería *finita*, y ſe limitára à un determinado numero de terminos.

Pero al contrario ſi proſiguiendo la diviſion *ſiempre* hubieſſe algun reſiduo que dividir, el quociente que ſaldria ſería una Série *infinita*, ò que jamás ſe acabaria; por lo tanto jamás ſe podria llegar à una expreſſion del todo exacta, de la fraccion, ò del quociente. Por eſſo dicha Série ſe ſuele rematar por un &c. que alguna vez ſe omite por ſuponerſe.

De aquí es, que toda Série que exprime la *potencia perfecta* de una quantidad compueſta, debe ſer *Série finita*, porque el numero de terminos, que exprimen la potencia m de $a+b$ por exemplo, es ſiempre $m+1$, y ſiendo m un numero entero determinado, tambien

bien lo ſerá $m+1$; de donde el numero de terminos, y la Série que exprime la potencia es finita.

Al contrario la Série que exprima una Raiz incommenſurable, como ſucederia ſacando la Raiz que indica eſta expreſſion $\sqrt{(a^2-x^2)}$, ò lo que es lo miſmo, la potencia que indica eſta $(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, ſerá una Série infinita, pues jamás llegará la tal operacion à tantos terminos, que multiplicados por sí miſmos den por producto exacto a^2-x^2. Adviertaſe, que por la miſma razon las Raices commenſurables, exprimiendolas à modo de Potencias, dan Série infinita, ſi el exponente de la Potencia es igual à una fraccion propria, como diximos *Tomo I. pag.* 223.

113 2°. Dividenſe las Séries en *Regulares*, è *Irregulares*. La Série Regular es aquella, cuyos terminos van ſucceſſivamente creciendo, ò diſminuyendo con una cierta, y determinada proporcion de un termino à otro. Por lo tanto ſon Séries Regulares todas las Progreſſiones Arithmeticas, y Geometricas, qualeſquiera que ſean, pues en las primeras ſiempre es una miſma, ò igual la diferencia del primer termino al ſegundo, del ſegundo al tercero, &c. y en las ſegundas ſiempre es uno miſmo el denominador, ò exponente de la razon de un termino à ſu immediato.

Son

Son tambien Séries Regulares aquellas, cuyos terminos guardan entre sí la proporcion de los Numeros Naturales 1, 2, 3, &c. ò la de los Quadrados, ò la de los Cubos, &c. de estos Numeros, ò bien la de los Quadrados, ò Cubos de qualesquiera otras quantidades, &c. Al contrario, quando los terminos aumentan, ò disminuyen sin orden alguno, las tales Séries son Irregulares.

214 3°. Dividense las Séries en *Convergentes*, y *Divergentes*. Série Convergente es aquella, en la qual los terminos van siempre disminuyendo, ò en que cada termino es menor que su antecedente. Assi la Série de las Fracciones Decimales es siempre Convergente, porque por exemplo $0.3543 = \frac{0}{1} + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{3}{10000}$.

Las Séries Divergentes son aquellas, cuyos terminos van siempre aumentando.

215 4°. Dividense las Séries en *Simples*, y *Compuestas*. Las Séries Simples son aquellas, cuyos terminos no se componen de los terminos de otras Séries. Al contrario las Séries Compuestas son aquellas, cuyos terminos se componen, ò forman por la addicion, substraccion, multiplicacion, ò division de los terminos de otras Séries. Assi si tomamos estas Séries de terminos $7 + 7 + 7 + 7$ &c. $3 + 4 + 5 + 6$ &c. y dividimos los terminos de la primera por los de la segunda, tendremos

mos la Série *Compuesta* $\frac{7}{3}+\frac{7}{4}+\frac{7}{5}+\frac{7}{6}$ &c.

Esta Série en que los numeradores de cada termino son los mismos, y los denominadores son los terminos de una Progression Arithmetica qualquiera, se llama tambien *Progression Harmonica*, Tomo I. num. 281.

Ultimamente, llamanse *Séries Recurrentes* aquellas, en quienes para encontrar el valor de algun termino intermedio, es menester encontrar primero alguno de los antecedentes, que por esso se llaman *Séries Recurrentes*, por haberse de recurrir à los primeros terminos. Tales son aquellas Séries, cuyo tercero, quarto termino, &c. se forma por la multiplicacion, division, substraccion, ò addicion del primer termino al segundo, &c.

216 De solo lo que hasta aquí hemos indicado se ve el campo immenso, que ofrecen al discurso las Séries, aun prescindiendo de las Séries Irregulares, que por no guardar sus terminos orden, ni correlacion alguna entre sí, no se pueden sujetar à ciertas leyes generales, y assi no hablaremos de ellas.

Lo que en las Séries Regulares se suele buscar, es su *Formacion*, ò la expression de alguna quantidad por medio de las Séries; su *Suma*, ò la suma de los terminos, que la componen; su *Interpolacion absoluta*, que es buscar el valor de un termino de la Série, dado el

el lugar, que en ella tiene, ò ſu diſtancia de él al primero; ò bien ſu *Interpolacion reſpectiva*, que es pueſtas dos Séries tales, que los terminos de la una tengan una determinada razon con los terminos de la otra, dado un termino de la una, encontrar ſu correſpondiente en la otra.

Muchas de eſtas coſas no ſe pueden explicar aquí por depender de Principios mui ſuperiores. En particular el ſumar varias eſpecies de Séries depende de la quadratura de las Curvas, porque guardando ſus terminos una lei, y orden entre sí, ſe pueden exprimir por lineas, que llaman *Ordenadas*, ò *Aplicadas* à otras; luego ſumando eſtas lineas, que es quadrar el eſpacio, que comprehende eſta Curva, ſerá *Sumar* dichos terminos.

De la miſma ſuerte encontrando el valor de una Ordenada, dada ſu diſtancia del principio, ſerá encontrar el valor del termino de la Série, en que ſe contiene, y ſerá ſu *Interpolacion*. Por lo tanto preſcindiendo de eſtas coſas, que ſe encontrarán bien tratadas en Stirling *de Summatione, & Interpolatione Serierum*, en Stewart *de Quadraturis Curvarum*, algunas en Riccati *de Seriebus recipientibus Summam Generalem Algebraicam*, en Moivre, y en Newton, trataremos ſolo algunas coſas, que no exceden los Principios Generales de Algebra.

ARTI-

ARTICULO II.

De la Formacion de las Séries.

217 LO que comunmente se suele exprimir por Séries finitas, ò infinitas son las *Potencias Perfectas*, è *Imperfectas*, las *Raices* de las Quantidades Algebraicas compuestas, las *Fracciones* assi *Algebraicas*, como *Numericas Comunes*, reduciendo estas à Decimales. Como para esto da una luz immensa la formacion de una Potencia, y sus Terminos, tomemos la sexta Potencia del Binomio $1+x$, que es $1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$.

Dividiendo cada termino de esta Série por su antecedente, tendremos $\frac{6x}{1}$, $\frac{15x^2}{6x}\left(=\frac{5x}{2}\right)$, $\frac{20x^3}{15x^2}\left(=\frac{4x}{3}\right)$, $\frac{15x^4}{20x^3}\left(=\frac{3x}{4}\right)$, $\frac{6x^5}{15x^4}\left(=\frac{2x}{5}\right)$, $\frac{x^6}{6x^5}\left(=\frac{x}{6}\right)$; assi la Série de que está compuesta dicha Potencia, es $\frac{6x}{1}+\frac{5x}{2}+\frac{4x}{3}+\frac{3x}{4}+\frac{2x}{5}+\frac{x}{6}$, que siendo formada por la division de cada termino de la Potencia por su antecedente; de esta Série se formará la Potencia por la succesiva multiplicacion de cada termino de

la

el tercer termino à ser $\frac{m-1}{2}Bx$. El quarto termino será $\frac{m-1}{2}Bx \times \frac{m-2}{3}x$, que para ahorrar multiplicaciones hago $C = \frac{m-1}{2}Bx$, se reducirá el quarto termino à ser $\frac{m-2}{3}Cx$, &c.; de donde finalmente $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}Ax + \frac{m-1}{2}Bx + \frac{m-2}{3}Cx + \frac{m-3}{4}Dx$ &c.

En esta operacion se ve, que m es un numero indeterminado, capaz de significar qualquier numero determinado, en cuyo lugar en los casos particulares se ha de substituir el exponente de la Potencia. Se ve tambien, que A es el primer termino de la Potencia, B el segundo, C el tercero, &c.; de donde siendo $m = 8$, será $(1+x)^m = (1+x)^8 = 1 + \frac{8}{1}Ax + \frac{7}{2}Bx + \frac{6}{3}Cx + \frac{5}{4}Dx + \frac{4}{5}Ex + \frac{3}{6}Fx + \frac{2}{7}Gx + \frac{1}{8}Hx$, y substituyendo en lugar de A, B, C, &c. los terminos que ellos significan, se reducirá dicha Série à ser $= 1 + 8x + 28x^2 + 56x^3 + 70x^4 + 56x^5 + 28x^6 + 8x^7 + x^8$.

220 De estos dos modos de exprimir por medio de una Série la Potencia de un Binomio qualquiera, es à saber por esta Série $1 + \frac{8}{1}Ax + \frac{7}{2}Bx$ &c., ò bien por esta otra $1 + 8x + 28x^2$ &c. se sigue, *que hai dos modos para multiplicar una Potencia de una quantidad complexa*

plexa por una quantidad dada (n). Si nos servimos de la primera Série $1 + \frac{8}{1}Ax$ &c. basta para dicha multiplicacion, multiplicar solo el primer termino (1) por dicha quantidad, y assi $(1+x)^8 \times n = n + \frac{8}{1}Ax + \frac{7}{2}Bx$ &c. Porque significando A el primer termino, será $A = n$, de donde $\frac{8}{1}Ax = \frac{8}{1}nx$, y como $B = \frac{8}{1}Ax$, será tambien $= \frac{8}{1}nx$, por consiguiente todos los demás terminos siguientes tambien serán multiplicados por n, y assi lo será toda la Potencia.

Si usamos para la expression de la Potencia del Binomio, de esta otra Série $1 + 8x + 28x^2$ entonces para su multiplicacion por n se habrán de multiplicar por ella todos los terminos. Por lo tanto $(1+x)^8 \times n = n + 8nx + 28nx^2$ &c.

221 Como en esta expression $(1+x)^m$, x es capaz de exprimir qualquier quantidad, y m qualquier exponente, nos podremos valer de la Série $1 + \frac{m}{1}Ax + \frac{m-1}{2}Bx$ &c. para exprimir por Série qualquier Potencia de qualquier quantidad, que exceda la unidad, significando x la diferencia de la tal quantidad à la unidad, y m el exponente de la Potencia que se busca.

De la misma suerte para qualquier Potencia de qualquier quantidad inferior à 1, sea positiva, sea negativa, nos podremos valer

de $(1-x)^m$. Si x es menor que 1, será $1-x$ una fraccion, ò quantidad positiva, $(1-x)^m$ su Potencia indeterminada. Si x es mayor que 1, será $1-x$ quantidad negativa, $(1-x)^m$ su Potencia, y la Série que exprima la Potencia será la misma que arriba, en orden à sus terminos, y coeficientes; pero los signos irian alternando de positivo en negativo.

222 De este methodo nos podremos valer para exprimir por Séries 1°. qualquier Potencia de qualquier Binomio, por exemplo $p+q$, considerando este Binomio como un producto, cuyos factores son $(1+\frac{q}{p})$, y p; de donde $p+q=(1+\frac{q}{p})\times p$, $(p+q)^m=(1+\frac{q}{p})^m\times p^m$. Y assi exprimiendo por Série $(1+\frac{q}{p})^m$, y multiplicando dicha Série por p^m, de la suerte que hemos dicho, tendremos la Série, que exprime la Potencia $(p+q)^m$.

2°. Tambien se podrá exprimir por Série toda Fraccion, cuyo numerador es 1, por exemplo $\frac{1}{(a+b)^{\frac{1}{3}}}$, porque $\frac{1}{(a+b)^{\frac{1}{3}}}=(a+b)^{-\frac{1}{3}}$; de donde exprimiendo por Série la quantidad $(a+b)^{-\frac{1}{3}}$, es à saber, haciendo $m=-\frac{1}{3}$, tendremos la Série, que exprime $\frac{1}{(a+b)^{\frac{1}{3}}}$.

Se

3°. Se podrá exprimir por Série qualquiera Fraccion, qualesquiera que sean numerador, y denominador, por exemplo $\frac{Ap}{(p-q)^{\frac{7}{8}}}$, considerando esta Fraccion como un producto, cuyos factores sean $\frac{1}{(p-q)^{\frac{7}{8}}}$, y Ap; de donde exprimiendo por Série $\frac{1}{(p-q)^{\frac{7}{8}}} = (p-q)^{-\frac{7}{8}}$, y multiplicando dicha Série por Ap, tendremos la Série, que exprima $\frac{Ap}{(p-q)^{\frac{7}{8}}}$.

223. *Las Fracciones Algebraicas, qualesquiera que sean, se reducen tambien à Séries Finitas, ò Infinitas; segun las Fracciones fuessen, por la actual division del Numerador por el Denominador, y el Quociente será la Série, que exprime el valor de la tal Fraccion.*

Sea esta Fraccion $\frac{a}{c+bz}$. Haciendo su division indicada, saldrá por quociente esta Série infinita $\frac{a}{c} - \frac{abz}{c^2} + \frac{ab^2z^2}{c^3} - \frac{ab^3z^3}{c^4} + \frac{ab^4z^4}{c^5}$ &c.

Pero como este methodo de reducir las Fracciones à Séries es largo, y enfadoso, y muchas veces no se conoce por él tan facilmente la lei, que guardan entre sí los terminos de dicha Série, ò bien para ver como se

ha de proſeguir ſin la actual diviſion, ò bien para ver ſi ſe puede ſumar; por eſſo los Mathematicos han diſcurrido otro Methodo mas expedito, que por ſer de grande uſo no ſolo para reducir las Fracciones à Series, pero tambien para reducir otras quantidades, lo pondremos aquí.

224 Es cierto, que eſta Fraccion $\frac{a}{c+bz} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4$ &c. con tal, que los Coeficientes de las potencias de z, es à ſaber, A, B, C, D, &c. ſean tales quantidades quales ſe requieren para eſta igualdad; y como eſtas letras ſon capaces de ſignificar lo que queramos, ſignifiquen pues dichos Coeficientes los neceſſarios, aunque no ſepamos quales ſean, que deſpues les encontraremos ſu verdadero valor. Preſupueſta dicha Equacion, y multiplicandola por el denominador, ſerá $a = (c+bz) \times (A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4$ &c.), hecha la multiplicacion indicada, tendremos

$$a = \begin{cases} cA + cBz + cCz^2 + cDz^3 + cEz^4 \text{ &c.} \\ \quad + bAz + bBz^2 + bCz^3 + bDz^4 \text{ &c.} \end{cases}$$

paſſando todos los terminos à una parte, ſerá

$$\left.\begin{matrix} cA + cBz + cCz^2 + cDz^3 + cEz^4 \text{ &c.} \\ -a + bAz + bBz^2 + bCz^3 + bDz^4 \text{ &c.} \end{matrix}\right\} = 0.$$

Ahora pues, quando la ſuma de muchas quantidades es igual à 0, como en el caſo pre-

preſente, es cierto, que los terminos mutuamente ſe deſtruyen entre sí, y como en los terminos correſpondientes ya de la linea ſuperior, ya de la inferior de la Equacion ſon unas miſmas las potencias de z, es neceſſario, que la ſuma de los Coeficientes *homologos*, ò de una miſma potencia de z ſea igual à o; de donde $cA - a = o$, $cB + bA = o$, $cC + bB = o$, $cD + bC = o$, $cE + bD = o$. Por medio de eſtas pequeñas Equaciones ſe puede encontrar el valor de los Coeficientes A, B, C, D, &c. en quantidades conocidas a, b, c de la Fraccion $\frac{a}{c + bz}$.

Tomo pues la Equacioncilla primera $cA - a = o$, luego $cA = a$, $A = \frac{a}{c}$. Ya tengo el valor de A. Para encontrar el valor de B, tomo la ſegunda Equacioncilla $cB + bA = o$, y ſubſtituyendo por A ſu valor encontrado, tengo $cB + \frac{ba}{c} = o$, $cB = -\frac{ba}{c}$, $B = -\frac{ba}{c^2}$. Con el dicho methodo ſe encuentra el valor de C, D, E, &c. los quales valores ſubſtituyendolos en la Serie, que exprime el valor de la Fraccion $\frac{a}{c + bz}$, es à ſaber, $A + Bz + Cz^2$, &c. tendré por Serie, que exprime la Fraccion la ſiguiente $\frac{a}{c} - \frac{abz}{c^2} + \frac{ab^2z^2}{c^3} - \frac{ab^3z^3}{c^4}$ &c. la miſma que arriba.

Ex-

Reduccion de las Raices à Series.

225 Aſſentado pues que las *Fracciones* ſe reducen à Series, ò bien por la actual diviſion del Numerador por el Denominador, ò bien igualandolas à una Serie de Coeficientes incognitos, pero determinados, y buſcandoles deſpues ſu valor, como diximos num. 224, y que las *Potencias* ſi ſon perfectas ſe reducen à Series, ò bien por medio de la actual multiplicacion de la Raiz por sí miſma, y por ſus productos, ò bien por la Regla, que dimos num. 218, ò bien finalmente igualandolas à una Serie recurrente de Coeficientes generales, como hicimos en eſta $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}Ax + \frac{m-1}{2}Bx + \frac{m-2}{3}Cx + \frac{m-3}{4}Dx$ *&c.* llegando haſta $m+1$ terminos. Trataremos ahora de la Reduccion de *Raices* à Series finitas, ò infinitas.

Las *Raices*, ò Quantidades Radicales ſe reducen à Series, ò bien por la actual extraccion de Raices, ſegun las Reglas comunes, que dimos para extraher qualquier genero de Raices *Tomo I.*, atendiendo la lei, que guarda la Serie (aunque à veces es dificil encontrarla) para proſeguirla ſin la actual operacion, ò bien reduciendo las Raices à Potencias

cias imperfectas, y observando las Reglas, que para las Potencias hemos dado num. 218; ò bien finalmente tomando por expresion de la Raiz una Serie de Coeficientes incognitos, en la qual, quadrandola, ò cubandola, segun fuesse la especie de Raiz, recogiendo, y cotejando los Coeficientes homologos, como en las Fracciones num. 224, se encontrará el valor de tales Coeficientes, los quales substituidos en la Serie tomada darán el valor de la Raiz en Coeficientes conocidos, y para mayor claridad pondremos aquí los dos Problemas siguientes.

226 PROBLEMA I. *Sacar la Raiz Quadrada de esta quantidad* $a^{2n} + z^{2n}$ *en una Serie infinita.*

Sea $\sqrt{a^{2n} + z^{2n}} = A + Bz^{2n} + Cz^{4n} + Dz^{6n} + Ez^{8n}$ *&c.* Serie, que exprime la Raiz que se busca. Para encontrar los valores de los Coeficientes A, B, C, &c. levantense entrambos miembros à quadrado, y tendremos

$$\left.\begin{array}{l} A^2 + 2ABz^{2n} + 2ACz^{4n} + 2ADz^{6n} + 2AEz^{8n} \\ \qquad + B^2z^{4n} + 2BCz^{6n} + 2BDz^{8n} \\ \qquad\qquad + C^2z^{8n} \end{array}\right\} = a^{2n} + z^{2n}$$

passando todos los terminos à una parte, será

$$\left.\begin{array}{l} A^2 + 2ABz^{2n} + 2ACz^{4n} + 2ADz^{6n} + 2AEz^{8n} \\ = a^{2n} - z^{2n} + B^2z^{4n} + 2BCz^{6n} + 2BDz^{8n} \\ \qquad\qquad + C^2z^{8n} \end{array}\right\} = 0$$

de

de donde $A^2 - a^{2n} = 0$, $2AB - 1 = 0$, $2AC + B^2 = 0$, $2AD + 2BC = 0$, $2AE + 2BD + C^2 = 0$, por consiguiente $A = a^n$, $B \left(= \frac{1}{2A}\right) = \frac{1}{2a^n}$, $2AC = -B^2$, $C \left(= -\frac{B^2}{2A}\right) = -\frac{1}{8a^{3n}}$, $2AD = -2BC$, $D \left(= -\frac{BC}{A}\right) = \frac{1}{16a^{5n}}$, y en fin $E \left(= -\frac{2BD + C^2}{2A}\right) = -\frac{5}{128a^{7n}}$ &c. cuyos valores substituidos en la Serie $A + Bz^{2n} + Cz^{4n} + Dz^{6n}$ &c. dará $\sqrt{a^{2n} + z^{2n}} = a^n + \frac{z^{2n}}{2a^n} - \frac{z^{4n}}{8a^{3n}} + \frac{z^{6n}}{16a^{5n}} - \frac{5z^{8n}}{128a^{7n}}$ &c. en la qual si $n = 1$, será $\sqrt{a^{2n} + z^{2n}} = \sqrt{a^2 + z^2} = a + \frac{z^2}{2a} - \frac{z^4}{8a^3}$ &c.

Esta Formula se podrá aplicar à qualquier Binomio, cuyos exponentes sean iguales.

227 PROBLEMA II. *Sacar la Raiz Cubica de esta quantidad* $a + bz^n$ *en una Serie infinita.*

Sea $A + Bz^n + Cz^{2n} + Dz^{3n}$ &c. $= (a + bz^n)^{\frac{1}{3}}$, cubandolo todo, y haciendo passar todos los terminos à una parte, como en el Problema antecedente, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} A^3 + 3A^2Bz^n + 3A^2Cz^{2n} + 3A^2Dz^{3n} \text{ &c.} \\ \quad - a - bz^n + 3AB^2z^{2n} + 6ABCz^{3n} \text{ &c.} \\ \qquad\qquad + \quad B^3z^{3n} \text{ &c.} \end{array}\right\} = 0$$

de

de donde $A^3 = a$, $A = a^{\frac{1}{3}}$, $B\left(= \frac{b}{3A^2}\right) = \frac{b}{3a^{\frac{2}{3}}}$, $C\left(= -\frac{B^2}{A}\right) = -\frac{b^2}{9a^{\frac{5}{3}}}$, $D\left(= -\frac{6ABC + B^3}{3A^2}\right) = \frac{5b^3}{81a^{\frac{8}{3}}}$ &c. que ſubſtituidos todos en la Serie tomada, nos darán la Raiz cubica $(a + bz^n)^{\frac{1}{3}}$ $(= A + Bz^n + Cz^{2n} + Dz^{3n}$ &c.$) = a^{\frac{1}{3}} + \frac{bz^n}{3a^{\frac{2}{3}}} - \frac{b^2z^{2n}}{9a^{\frac{5}{3}}} + \frac{5b^3z^{3n}}{81a^{\frac{8}{3}}}$ &c.

228 Con un modo ſemejante ſe puede ſacar por Serie la Raiz qualquiera de qualquier quantidad, con la advertencia, que ſi es Raiz incommenſurable, la Serie ſerá infinita; ſi commenſurable, ſe limitará à cierto numero determinado.

Aſſi para encontrar la Raiz quadrada de $a^2 + 2ab + b^2$, hagaſe $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = A + Bb + Cb^2 + Db^3$ &c. Por lo tanto ſerá $A^2 = a^2$, $A = a$, $2AB = 2a$, $B = 1$, $2AC + B^2 = 1$, $C = 0$, $2AD = -2BC$, $D = 0$, $2AE = -C^2 - 2BD$, $E = 0$; por conſiguiente tendremos $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$, Raiz exacta.

En eſte Exemplo ſe ve quan diferente es el exprimir las Raices commenſurables por un Methodo, ò por otro, pues uno lo da exacto, y otro por aproximacion.

For-

Formula de Newton para la Reduccion de Raices à Series.

229 Aunque todos eſtos Methodos ſon utiliſſimos para reducir à Series las Quantidades, y ſegun eſtas fueſſen en caſos particulares ſe acómoda mejor un Methodo que otro; no obſtante el grande uſo que ſe hace (eſpecialmente en las Fluxiones) del celebrado Methodo de Newton me obliga à tratar ſeparadamente de él, habiendolo ya inſinuado en otras partes.

Sea P el primer termino de qualquier quantidad compueſta Binomia, Trinomia, &c. y Q el quociente que reſulta, dividiendo la ſuma de los demás terminos por el primero, ſerá toda la quantidad $P + PQ$, ò bien $P \times (1 + Q)$, y la potencia m de la tal quantidad, ſerá $P^m \times (1 + Q)^m$. Haciendo la operacion à la larga, ſegun lo que diximos de la expreſſion de las Potencias, multiplicandolo todo por P^m, tendremos $P^m \times (1 + Q)^m = P^m \times (1 + \frac{m}{1}Q + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times Q^2 + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times Q^3 + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times Q^4$ &c.)

Pero ſi el exponente de la Potencia es fraccion, como ſucede en la expreſſion de las Raices, ſerá mas util para la practica en lugar del

del exponente indeterminado m, usar de este otro $\frac{m}{n}$, por cuyo medio para exprimir por Series las Raices, será $P^{\frac{m}{n}} \times (1+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} \times (1 + \frac{m}{n} Q + \frac{m}{n} \times \frac{m-n}{2n} \times Q^2 + \frac{m}{n} \times \frac{m-n}{2n} \times \frac{m-2n}{3n} \times Q^3 + \frac{m}{n} \times \frac{m-n}{2n} \times \frac{m-2n}{3n} \times \frac{m-3n}{4n} \times Q^4$ &c.)

Supuesta esta Formula, su aplicacion se verá en los Problemas siguientes.

230. PROBLEMA I. *Sacar por este Methodo de Newton la Raiz quadrada de esta quantidad* $a^2 + z^2$.

Para valernos de dicha Formula de Newton habremos de reducir la Raiz de la quantidad dada à expression semejante à la de la Formula. Por lo tanto tendremos $\sqrt{(a^2+z^2)} = (a^2+z^2)^{\frac{1}{2}} = aa)^{\frac{1}{2}} \times (1 + \frac{zz}{aa})^{\frac{1}{2}}$, que cotejada con la expression general $P^{\frac{m}{n}} \times (1+Q)^{\frac{m}{n}}$, nos dará $P = a^2$, $m = 1$, $n = 2$, $Q = \frac{z^2}{a^2}$, que substituidos en la Serie, que exprime la Raiz $P^{\frac{m}{n}} \times (1 + \frac{m}{n} Q$ &c.) nos dará $\sqrt{a^2+z^2} = a \times (1 + \frac{1}{2} \times \frac{z^2}{a^2} + \frac{1}{2} \times -\frac{1}{4} \times \frac{z^4}{a^4} + \frac{1}{2} \times -\frac{1}{4} \times -\frac{3}{6} \times \frac{z^6}{a^6} + \frac{1}{2} \times -\frac{1}{4} \times -\frac{3}{6} \times -\frac{5}{8} \times \frac{z^8}{a^8}$, &c.) $= a + \frac{z^2}{2a}$ —

$-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}$ &c. la misma que n.226.

231 PROBLEMA II. *Sacar la Raiz Cubica de esta quantidad* b^3-y^3.

Valiendonos del mismo Methodo, será la tal Raiz cubica $(b^3-y^3)^{\frac{1}{3}}=bbb)^{\frac{1}{3}}\times(1-\frac{yyy}{bbb})^{\frac{1}{3}}$, que cotejandola con $P^{\frac{m}{n}}\times(1+Q)^{\frac{m}{n}}$, para substituir las quantidades, tendremos $P=b^3$, $m=1$, $n=3$, $Q=-\frac{y^3}{b^3}$, las quales substituidas en lugar de P, Q, m, n en la Serie $P^{\frac{m}{n}}\times(1+\frac{m}{n}Q+\frac{m}{n}\times\frac{m-n}{2n}Q^2$ &c.), se reducirá à ser $(b^3-y^3)^{\frac{1}{3}}=b\times(1+\frac{1}{3}\times-\frac{y^3}{b^3}+\frac{1}{3}\times-\frac{2}{6}\times\frac{y^6}{b^6}+\frac{1}{3}\times-\frac{2}{6}\times-\frac{5}{9}\times-\frac{y^9}{b^9}+\frac{1}{3}\times-\frac{2}{6}\times-\frac{5}{9}\times-\frac{8}{12}\times\frac{y^{12}}{b^{12}}$ &c.$)=b-\frac{y^3}{3b^2}-\frac{y^6}{9b^5}-\frac{5y^9}{81b^8}-\frac{10y^{12}}{243b^{11}}$ &c.

232 PROBLEMA III. *Reducir à Serie infinita esta quantidad* $\frac{b}{\sqrt{(bx-xx)}}$.

Preparando esta quantidad dada, tenemos $\frac{b}{\sqrt{(bx-x^2)}}=\frac{b}{b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1-\frac{x}{b})}}=\frac{b^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\times(1-\frac{x}{b})^{-\frac{1}{2}}$ $=\sqrt{\frac{b}{x}}\times(1-\frac{x}{b})^{-\frac{1}{2}}$, de donde reduciendo à Serie este factor $(1-\frac{x}{b})^{-\frac{1}{2}}=(1+Q)^{\frac{m}{n}}$, se-

rá $Q = -\frac{x}{b}$, $m = -1$, $n = 2$, y $\left(1 - \frac{x}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $= (1 + Q)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n} \times Q + \frac{m}{n} \times \frac{m-n}{2n} \times Q^2$ &c. $= 1 + \frac{x}{2b} + \frac{3x^2}{8b^2} + \frac{5x^3}{16b^3} + \frac{35x^4}{128b^4}$ &c., que multiplicando esta Serie por el otro factor $\sqrt{\frac{b}{x}} = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$, nos dará $\frac{b^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2b^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{8b^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{5}{2}}}{16b^{\frac{5}{2}}}$ &c. $= \frac{b}{\sqrt{(bx - x^2)}}$.

233 PROBLEMA IV. *Sacar por Serie infinita la Raiz Cubica de este Trinomio* $z^3 + 2z^4 + 3z^5$.

Será la tal Raiz cubica $(z^3 + 2z^4 + 3z^5)^{\frac{1}{3}}$ $= z^3)^{\frac{1}{3}} \times (1 + 2z + 3z^2)^{\frac{1}{3}}$, que aplicada à la expresion de Newton dará $P = z^3$, $m = 1$, $n = 3$, $Q = 2z + 3z^2$, las quales quantidades sùbstituidas en la Serie general de las Raices $P^{\frac{m}{n}} \times (1 + \frac{m}{n} \times Q$ &c.), tendremos por la Raiz cubica de la quantidad propuesta $z \times (1 + \frac{1}{3} \times (2z + 3z^2) + \frac{1}{3} \times -\frac{2}{6} \times (2z + 3z^2)^2 + \frac{1}{3} \times -\frac{2}{6} \times -\frac{5}{9} \times (2z + 3z^2)^3$ &c.) $= z \times (1 + \frac{2z + 3z^2}{3} - \frac{(2z + 3z^2)^2}{9} + \frac{5 \times (2z + 3z^2)^3}{81}$ &c.), que hechas las multiplicaciones indicadas, se reducirá à ser

ser $z+\frac{2z^2}{3}+\frac{5z^3}{9}-\frac{68z^4}{81}$ &c. $=\overline{z^3+2z^4+3z^5}\Big)^{\frac{1}{3}}$

234 PROBLEMA V. *Reducir à Serie esta quantidad* $\overline{1+x}\times\overline{1-x}\Big)^{\frac{1}{10}}$.

Adviertase aquí (lo que se puede reparar en muchas quantidades de las que comunmente ocurren) que à veces la quantidad que se propone, sí bien *Irracional*, es no obstante un producto, entre cuyos factores el uno es Racional, y el otro Irracional. Como en el caso propuesto $\overline{1+x}$ es racional, $\overline{1-x}\Big)^{\frac{1}{10}}$ es irracional; luego reduciendo à Serie infinita el factor irracional, y multiplicandola por el otro factor racional, se tendrá reducido à Serie el producto, que absolutamente es quantidad irracional.

Mas à veces todos los factores, dos, tres, &c. quantos sean, ò bien numerador, y denominador en las Fracciones son irracionales, como en esta fraccion $\frac{\overline{a^2-x^2}\Big)^{\frac{1}{2}}}{\overline{c^2-x^2}\Big)^{\frac{1}{2}}}$, ò bien en la misma, puesta à forma de producto $\overline{a^2-x^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\times\overline{c^2-x^2}\Big)^{-\frac{1}{2}}$, en estos casos reduciendo à Serie infinita, por las Reglas dadas, entrambos factores, ò numerador, y denominador en las Fracciones, multiplicando algunos de los primeros terminos de una Serie por

por algunos de los primeros terminos de la otra, ò bien dividiendo para las Fracciones, se tendrá en Serie el valor de la tal quantidad.

Presupuesto esto, volviendo al Problema, será $\overline{1-x}^{\frac{1}{10}} = \overline{1+Q}^{\frac{m}{n}}$, de donde $Q=-x$, $m=1$, $n=10$, que substituidos en la expression general de la Serie, dan $\overline{1-x}^{\frac{1}{10}} = 1 - \frac{x}{10} - \frac{9x^2}{10\times 20} - \frac{9\times 19x^3}{10\times 20\times 30} - \frac{9\times 19\times 29x^4}{10\times 20\times 30\times 40}$ &c. la qual Serie multiplicada por el otro factor racional $1+x$, darán $\overline{1+x\times 1-x}^{\frac{1}{10}} = 1 + \frac{9x}{10} - \frac{29x^2}{200} - \frac{147x^3}{2000}$ &c.

235 PROBLEMA VI. *Reducir à Serie esta Potencia de Multinomio*

$$(y^p + ay^{p+n} + by^{p+2n} + cy^{p+3n} \text{ \&c.})^v.$$

Dividiendo este Multinomio por el primer termino, y^p, será toda la quantidad dada $= y^{pv} \times (1 + ay^n + by^{2n} + cy^{3n}$ &c.$)^v$, y si para abreviar terminos hacemos $ay^n + by^{2n} + cy^{3n}$ &c. $= x$, se reducirá la quantidad dada à ser $y^{pv} \times (1+x)^v$, con que reduciendo à Serie este ultimo factor, tendremos la tal quantidad $= y^{pv} \times (1 + vx + \frac{v}{1} \times \frac{v-1}{2} \times x^2 + \frac{v}{1} \times \frac{v-1}{2} \times \frac{v-2}{3} \times x^3$ &c.$)$, y si para abreviar aun mas, hacemos los coeficientes $v = A$, $\frac{v}{1} \times \frac{v-1}{2} = B$,

$\frac{v}{1} \times \frac{v-1}{2} \times \frac{v-2}{3} = C$, $\frac{v}{1} \times \frac{v-1}{2} \times \frac{v-2}{3} \times \frac{v-3}{4}$ $= D$, *&c.* ſubſtituyendo A, B, C, D, &c. por los reſpectivos coeficientes, y los valores reſpectivos en lugar de x, tendremos la quantidad dada $(y^p + ay^{p+n} + by^{p+2n} + cy^{p+3n}$ *&c.*$)^v$ $= y^{pv} + Aay^{pv+n} + (Ab + Ba^2) \times y^{pv+2n} + (Ac + 2Bab + Ca^3) \times y^{pv+3n} + (Ad + 2Bac + Bb^2 + 3Ca^2b + Da^4) \times y^{pv+4n}$ *&c.*), ſignifiquen los coeficientes a, b, c, *&c.*, y los exponentes p, n, v, qualeſquiera quantidades.

ARTICULO III.

Modo de Sumar algunas Series.

236 PReſupueſta la doctrina de las Series, que haſta aquí hemos explicado, trataremos en eſte Articulo del modo de ſumar algunas Series.

Sumar una Serie es reducir à una breve expreſſion la ſuma total de los terminos que la componen. Lo primero que ſe ha de hacer, quando ſe haya de ſumar alguna Serie es examinar ſi la Serie es *creciente*, ò *decreciente* lo que ſe hace, ſacando cada termino de ſu immediato antecedente, ſi la reſta, ò diferencia es quantidad *negativa* la Serie es creciente, porque en tal caſo el ſegundo termi-

no

no es mayor que el primero, y el tercero mayor que el ſegundo: ſi las diferencias ſon *poſitivas*, la Serie es decreciente, por la razon contraria: ſi las diferencias ſon o, todos los terminos ſon iguales entre sí.

Conociendo ya ſi la Serie es creciente, ò decreciente, examineſe *con que lei crece, ò diſminuye.* Si las diferencias ſon ſiempre las miſmas, ò iguales entre sí, las Series ſerán Progreſſiones Arithmeticas, y entonces para ſumarlas no ſon meneſter otras Reglas, que las que dimos *Tomo I.* num.264.

Si las diferencias ſon desiguales, examineſe ſi acaſo la Serie es alguna Progreſſion Geometrica, ò ſi es una miſma la razon de cada termino à ſu immediato, y eſto ſe encuentra dividiendo el termino antecedente por ſu conſiguiente, ò el conſiguiente por ſu antecedente, y el quociente indicará la razon, que tienen entre sí los terminos. Si los quocientes ſon los miſmos, la Serie ſerá una Progreſſion Geometrica, y ſe podrá ſumar por las Reglas del *Tomo I.* num.272.

Si los quocientes ſon diferentes depende à veces de principios ſuperiores, por la grande variedad, que puede haber en ellos, aunque el Methodo de quadrar las Curvas ſirve mucho para eſtos caſos; pero no nos podemos valer de él al preſente. Por lo tanto no ſe puede enſeñar aquí el Methodo de Sumar to-

da eſpecie de Series; pero no obſtante daremos Reglas para ſumar algunas Series, que ſon las que mas ocurren, quales ſon las Series de los Numeros Naturales, de ſus Quadrados, Cubos, &c. valiendonos para eſto de un Methodo ſemejante à aquel, de que nos valimos para encontrar los coeficientes de los terminos de las Series, que exprimen las fracciones.

237 PROBLEMA I. *Encontrar la Suma de la Progreſſion de los Numeros Naturales* $1+2+3+4\ldots+n$. *Significando* n *qualquier numero de terminos.*

Como eſta Serie es una Progreſſion Arithmetica, la ſuma del primero, y ultimo termino multiplicada por la mitad del numero de terminos, ſerá la ſuma de la Serie; aſſi

$$1+2+3+4\ldots+n=An^2+Bn,$$

ſupueſtos A, y B los coeficientes, que para eſta igualdad ſe requieren.

Si el numero de terminos de dicha Serie lo aumentamos de una unidad, ò lo que es lo miſmo, ſi hacemos el ultimo termino $n+1$, tendremos $1+2+3+4\ldots+n+(n+1)=A\times(n+1)^2+B\times(n+1)=An^2+2An+A+Bn+B$, quitando de eſta la primera Equacion, reſulta $n+1=2An+A+B$, tranſponiendo, ſerá $(2A-1)\times n+A+B-1=0$; por conſiguiente $2A=1$, $A=\frac{1}{2}$, $A+B=1$,

B

$B = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, y assi será $An^2 + Bn = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n \times (n+1)}{2} (= 1 + 2 + 3 + 4 \ldots n)$, valor de la Progresſion, ò Serie de los Numeros Naturales, llegando haſta n terminos.

238 PROBLEMA II. *Encontrar la Suma de la Serie de los Quadrados de los Numeros Naturales* $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots n^2$, *esto es*, $1 + 4 + 9 + 16 \ldots n^2$.

Sea la tal Suma $= An^3 + Bn^2 + Cn$. Diſcurriendo como en el Problema antecedente, esto es, aumentando de una unidad el numero de terminos de la Serie, tendremos $A \times (n+1)^3 + B \times (n+1)^2 + C \times (n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots + n^2 + (n+1)^2$.

Hecha la multiplicacion, será $An^3 + 3An^2 + 3An + A + Bn^2 + 2Bn + B + Cn + C = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots + n^2 + (n+1)^2$. De la qual Equacion quitando la primera, tendremos $3An^2 + 3An + A + 2Bn + B + C = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, y paſſandolo todo à una parte, nos dará $(3A - 1) \times n^2 + (3A + 2B - 2) \times n + A + B + C - 1 = 0$.

Para encontrar los coeficientes A, B, C, tenemos las Equaciones $3A - 1 = 0$, $3A + 2B - 2 = 0$, $A + B + C - 1 = 0$; por lo tanto $3A = 1$, $A = \frac{1}{3}$, $3A + 2B = 2$, $2B = 2 - 3A$, $B = \frac{2 - 3A}{2} = \frac{2}{2} - \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $A + B + C = 1$, $C = 1 - A - B = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Subſ-

tituyendo pues los valores de A, B, C en la expreſſion de la ſuma de la Serie, tenemos por valor de la tal ſuma $An^3 + Bn^2 + Cn = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$, Suma de los Quadrados de los Numeros Naturales haſta n terminos.

239 PROBLEMA III. *Encontrar la Suma de la Serie de los Cubos de los Numeros Naturales* $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \ldots + n^3$.

Sea $An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \ldots + n^3$. Haciendo ſemejantes operaciones à las de los Problemas precedentes, venimos à parar en la Equacion $4An^3 + 6An^2 + 4An + A + 3Bn^2 + 3Bn + B + 2Cn + C + D = (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$. Y paſſando todos los terminos à una parte, $(4A - 1)n^3 + (6A + 3B - 3)n^2 + (4A + 3B + 2C - 3)n + A + B + C + D - 1 = 0$.

Para encontrar los coeficientes A, B, C, D, tenemos $4A - 1 = 0$; luego $4A = 1$, $A = \frac{1}{4}$, $6A + 3B - 3 = 0$, $6A + 3B = 3$, $3B = 3 - 6A$, $B = \frac{3 - 6A}{3} = 1 - \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, $4A + 3B + 2C - 3 = 0$, $4A + 3B + 2C = 3$, $2C = 3 - 4A - 3B$, $C = \frac{3 - 4A - 3B}{2} = \frac{1}{4}$, $A + B + C + D - 1 = 0$, $A + B + C + D = 1$, $D = 1 - A - B - C = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$.

Subſtituyendo los valores de A, B, C en la

la expreſſion del valor de la ſuma de la Serie de los Cubos de los Numeros Naturales, tenemos por valor de dicha ſuma $An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2 \times (n+1)^2}{4}$.

Valiendonos de ſemejantes Problemas, y Operaciones, encontraremos que las ſumas de las Series de las *Quartas*, *Quintas*, y *Sextas* Potencias de los Numeros Naturales ſon

$$1^4 + 2^4 + 3^4 \ldots + n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}.$$

$$1^5 + 2^5 + 3^5 \ldots + n^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}.$$

$$1^6 + 2^6 + 3^6 \ldots + n^6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}.$$

240 De la miſma ſuerte ſe encontrará la ſuma de qualeſquiera Potencias de los Numeros Naturales haſta qualquier numero de terminos. Teniendo pues la Formula que exprime la ſuma que ſe buſca, de las Potencias de los Numeros Naturales, ſubſtituyendo en lugar de n el numero de terminos dado, tendremos el valor de la ſuma que ſe buſca.

Por exemplo, hayaſe de encontrar la ſuma de los Quadrados de los Numeros Naturales haſta 10 terminos, en eſte caſo ſerá $n = 10$, y $\frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6} = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 5 \times 11 \times 7 = 385$, ſuma de los Quadrados de los Nu-

completa, tendremos por Formula general $\frac{n \times (n+1) \times (2n+1) - m \times (m+1) \times (2m+1)}{6}$, que exprime el numero de Balas de qualquier Pila quadrada incompleta.

243 Aunque los Problemas dados hasta aquí solo sean para las Sumas de las Series de las Potencias de los Numeros Naturales, en las quales el Primer termino, y la comun Diferencia entre las Raices es 1; no obstante pueden servir tambien para otras Series de Potencias, en las quales el Primer termino, y la Diferencia de las Raices sean otros Numeros dados, *con tal que la Raiz del Primer termino sea multiplice de la Diferencia de las Raices*, como en esta Serie $6^2 + 8^2 + 10^2 +$ &c. esto es $36 + 64 + 100 +$ &c. continuada hasta ocho terminos, ò mas, en la qual Serie la Raiz del Primer termino es 6, multiplice de la Diferencia (2) de las Raices.

Porque dividiendo la tal Serie por el quadrado de la diferencia (4), se reduce à esta otra $3^2 + 4^2 + 5^2 \ldots + 10^2$, la qual multiplicada por el mismo quadrado de la diferencia (4), tendremos $4 \times (3^2 + 4^2 + 5^2 \ldots 10^2) = 6^2 + 8^2 + 10^2 +$ &c. llegando hasta ocho terminos. Luego encontrando el valor de esta Serie $3^2 + 4^2 + 5^2 \ldots 10^2$, y multiplicando su suma por el quadrado de la Diferencia de las Raices (4), tendremos el valor de la Serie

rie $6^2 + 8^2 + 10^2$ &c. Pero la ſuma de eſta Serie $3^2 + 4^2 + 5^2 \ldots 10^2$ &c. ſe encuentra por el ſegundo Problema, pues es igual à la Serie $1^2 + 2^2 + 3^2$ &c. menos los dos primeros terminos $1^2 + 2^2$; luego encontrando la ſuma de los quadrados de los Numeros Naturales, y quitando de ella la ſuma de los dos primeros terminos (5), tendremos la ſuma $3^2 + 4^2 + 5^2$ &c. la qual multiplicada por 4, ſerá la ſuma de $6^2 + 8^2 + 10^2$ &c. haſta ocho terminos, que ſerá $380 \times 4 = 1520$.

Pero ſi la Raiz del primer termino de la Serie no es multiplice de la Diferencia de las Raices, por conſiguiente ni diviſible por dicha diferencia, la ſuma de ſemejantes Series ya es mas dificil, pero no impoſſible, porque ſe puede la tal Serie reducir à muchas otras, como à ſus partes, cuya ſuma total ſerá la ſuma de la Serie propueſta.

Sea eſta Serie $(m+e)^2 + (m+2e)^2 + (m+3e)^2 \ldots + (m+ne)^2$, ſignificando m, y e qualeſquiera quantidades, y n el numero de terminos de la tal Serie. Haciendo las multiplicaciones indicadas, y ordenando debidamente los terminos, compondrán las tres Series ſiguientes

$$m^2 + m^2 + m^2 \ldots m^2$$
$$2me + 4me + 6me \ldots 2mne$$
$$e^2 + 4e^2 + 9e^2 \ldots n^2e^2.$$

244 Eſtas tres Series ſon faciles de ſumar, pues la primera $= n \times m^2$. La ſegunda es $2me$

$\times (1+2+3+4 \ldots n)$, que ſegun el primer Problema es $2me \times n \times \frac{(n+1)}{2}$, por ſer el un factor la Serie de los Numeros Naturales.

La tercera es $e^2 \times (1+4+9+16 \ldots n^2) = e^2 \times \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$, por ſer un factor la ſuma de la Serie de los quadrados de los Numeros Naturales.

De donde ſumando eſtas tres expreſſiones, tendremos la ſuma total de la Serie propueſta, y ſerá $(m+e)^2 + (m+2e)^2 + (m+3e)^2 \ldots + (m+ne)^2 = n \times m^2 + n \times (n+1) \times me + \frac{n \times (n+1) \times (2n+1) \times e^2}{6}$.

245 Con ſemejantes operaciones à las antecedentes, la Serie de los Cubos $(m+e)^3 + (m+2e)^3 + (m+3e)^3 \ldots (m+ne)^3$, ſe reducirá à eſtas otras Series

$(1+1+1+1 \ldots 1) \times m^3$
$(1+2+3+4 \ldots n) \times 3m^2e$
$(1+4+9+16 \ldots n^2) \times 3me^2$
$(1+8+27+64 \ldots n^3) \times e^3$

cuyas ſumas ſiendo de Series de Unidades, de Numeros Naturales, de ſus Quadrados, de ſus Cubos, multiplicadas dichas Series por quantidades determinadas, ſe encontrarán por los Problemas precedentes, y ſerá la ſuma total de la dicha Serie $= n \times m^3 + \frac{n \times (n+1) \times 3m^2e}{2}$

+

$$+\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)3me^2}{6}+\frac{n^2\times(n+1)^2\times e^3}{4}.$$

246 Hasta ahora solo hemos enseñado el methodo para sumar las Series de los Numeros Naturales, y de sus Potencias, ya comenzando dichas Series de 1, y siendo la Diferencia de las Raices 1, ya tambien comenzando el primer termino por otra quantidad, y siendo otra la Diferencia de las Raices. Pero los Problemas dados pueden tambien servir para sumar las Series de *Rectangulos*, ò de productos de dos quantidades, *con tal que los factores de dichos productos estén en Progression Arithmetica.*

Sea esta Serie de productos $(m+e)\times(p+e)+(m+2e)\times(p+2e)+(m+3e)\times(p+3e)\ldots+(m+ne)\times(p+ne)$, cuyos factores forman las Progressiones Arithmeticas $m+e$, $m+2e$, &c. $p+e$, $p+2e$, &c. Haciendo la multiplicacion indicada, tendremos estas tres Series

$$\begin{array}{lllll} mp & + mp & + mp & \ldots + & mp \\ (m+p)\times e & +(m+p)\times 2e & +(m+p)\times 3e & \ldots+(m+p)\times ne \\ e+ & 4e^2+ & 9e^2\ldots+ & & n^2e^2 \end{array}$$

A poca reflexion, que se haga sobre estas Series, se ve, que sus sumas son

$$(1+1+1\ldots+1)\times mp = n\times mp$$

$$(1+2+3\ldots+n)\times(m+p)e=\frac{n\times(n+1)}{2}\times(m+p)e$$

$$(1+4+9\ldots+n^2)e^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}e^2$$

y

y la ſuma total de las tres, que es la ſuma de la Serie propueſta es $= n \times mp + \frac{n \times (n+1)}{2} \times (m+p)\, e + e^2 \times \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$.

247 Eſta ſuma de *Series de Rectangulos* es mui util para los que frequentan los Almacenes de Artilleria; porque ſi las *Pilas quadradas* de Balas ſe cuentan por la expreſſion de la ſuma de la Serie de los quadrados de los Numeros Naturales, las *Pilas oblongas*, ſean *completas*, ſean *incompletas*, ſe contarán por la expreſſion de la ſuma de la Serie de los Rectangulos, cuyos lados, ò factores eſtén en Progreſſion Arithmetica, *cuya Diferencia reinante ſea* 1.

Suponiendo pues en la Serie comun $e = 1$, ſe reducirá dicha Serie à eſta $(m+1) \times (p+1) + (m+2) \times (p+2) + (m+3) \times (p+3) \ldots + (m+n) \times (p+n)$, cuya ſuma ſerá $= n \times mp + \frac{n \times (n+1)}{2} \times (m+p) + \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$, en la qual $m+1$, y $p+1$ ſignificarán la longitud, y latitud del primer Rectangulo, y n el numero de Rectangulos.

Aplicando eſta doctrina à una Pila oblonga de Balas, ſea completa, ſea incompleta, con tal que las lineas, ò hileras ſean completas, ſe advertirá, que tales Pilas no ſon otra coſa, que una Serie de Rectangulos, cuyos lados,

ò factores van creciendo en Proporcion Arithmetica, cuya diferencia reinante es 1; luego haciendo $m+1=$ à la longitud de la primera fila, $p+1=$ à ſu latitud, $n=$ al numero de filas de arriba abaxo, la ſuma $n \times mp + \frac{n \times (n+1)}{2} \times (m+p) + \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$ exprimirá el numero de Balas, que hai en dicha pila.

248 Pero como eſta Formula es de mucha importancia, y de grande utilidad en los Almacenes de Artilleria, para mayor claridad de ſu uſo, pondremos dos Exemplos, uno de una Pila *completa*, y otro de una Pila *incompleta*.

Sea pues una Pila *completa*, que conſte de 15 filas de Balas, contando de arriba abaxo, y la fila ſuperior (que en las Pilas completas es una Simple linea) conſte de 32. Buſqueſe *quantas Balas hai en ella.*

En eſte caſo, para valernos de la expreſſion ſuperior de la ſuma $n \times mp$, &c., habremos de hacer $n=15$, $m=31$, porque $m+1$ es la longitud 32, $p=0$, porque $p+1$ es la latitud de la fila ſuperior, que ſiendo una ſimple linea de Balas (como es en todas las Pilas completas) tiene ſolamente 1 Bala de latitud. Poniendo en la Formula ſuperior en lugar de n, m, p ſus valores, ſerá $n \times mp + \frac{n \times (n+1)}{2} \times (m+p) + \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6} =$

$15\times 0+\frac{15(15+1)}{2}\times(31+0)+\frac{15(15+1)\times(30+1)}{6}$
$= 4960$, total de las Balas, que hai en la Pila completa dada.

Sea otra Pila *incompleta* tal, que la longitud de la fila ſuperior ſea 25 Balas, la latitud 16, y el numero de filas de arriba abaxo 11, en tal caſo $n = 11$, $m = 24$, $p = 15$, y ſubſtituyendo dichos valores en la Formula ſuperior, y general, ſerá ſu ſuma $= 11\times 24\times 15+\frac{11(11+1)}{2}\times(24+15)+\frac{11(11+1)\times(22+1)}{6}$
$= 7040$ Balas.

249 De eſta Formula ſuperior, ſe puede ſacar para contar el numero de Balas de qualquier Pila oblonga, ſea completa, ſea incompleta, eſta Regla general: *Al doble de la longitud, y al doble de la latitud de la fila ſuperior añadaſe à cada uno el numero de filas menos* ●, *y multipliquenſe entre sí eſtas dos Sumas. Multipliqueſe tambien deſpues el numero de filas menos* 1, *por el numero de filas mas* 1, *añadaſe* $\frac{1}{3}$ *de eſte Producto al primero,* $\frac{1}{4}$ *de eſta Suma multiplicado por el numero de filas, ſerá la Suma total de las Balas de dicha Pila.*

Aſſi en el primer Exemplo de la Pila *completa*, el primer producto ſerá $(64+14)\times(2+14)=78\times 16=1248$, el ſegundo producto ſerá $(15-1)\times(15+1)=14\times 16=224$. El $\frac{1}{3}$ de eſte producto es $=74\frac{2}{3}$, el qual añ-

añadido al primer producto es $1248 + 74\frac{2}{3} = 1322\frac{2}{3}$, cuyo $\frac{1}{4}$ es $330\frac{2}{3}$, que multiplicado por el numero de filas (15) da $330\frac{2}{3} \times 15 = 4960$, numero total de Balas, como arriba.

En el ſegundo Exemplo de la Pila *incompleta*, el primer producto ſerá $(50 + 10) \times (32 + 10) = 60 \times 42 = 2520$, el ſegundo ſerá $(11 - 1) \times (11 + 1) = 10 \times 12 = 120$, cuyo $\frac{1}{3}$ es 40, que añadido al primer producto, ſerá $2520 + 40 = 2560$, cuyo $\frac{1}{4}$ es 640, que multiplicado por el numero de filas (11), da por producto $640 \times 11 = 7040$, numero total de Balas de dicha Pila, como arriba.

Como el *Quadrado* es una eſpecie de *Rectangulo*, cuyos lados, ò factores ſon iguales, haciendo $m = p$, eſto es, la *longitud* de las filas igual à *ſu latitud*, podrá eſta miſma Regla ſervir tambien para contar las Balas de la Pila *quadrada*, ſea completa, ſea incompleta, y aſſi una ſola Regla podrá ſervir para contar todas eſpecies de Pilas de Balas, que comunmente ſe encuentran en los Almacenes; advirtiendo, que en las Pilas quadradas *completas* ſerá $m = 0$, $p = 0$, por ſer la fila ſuperior (ſi fila ſe puede llamar) una ſola Bala.

Sea una Pila quadrada completa, cuyo numero de filas de arriba abaxo ſea 50. Buſqueſe ſu numero de Balas. Como en ſemejantes Pilas la fila ſuperior es 1 Bala, contando por la Regla aquí dada, ſerá el primer producto

(2 + 49)

$(2+49)\times(2+49)=51\times51=2601$, el ſegundo producto ſerá $(50-1)\times(50+1)=49\times51=2499$, el $\frac{1}{3}$ de eſte producto 833, que añadido al primero ſerá $2601+833=3434$, cuyo $\frac{1}{4}$ es $858\frac{1}{2}$, que multiplicado por el numero de filas (50), da $858\frac{1}{2}\times50=42925$, la miſma ſuma que arriba.

CAPITULO XVII.

De los Numeros Figurados.

250 MUcha correlacion tienen los *Numeros Figurados* con lo que hemos dicho en el Capitulo antecedente reſpecto de las Series, y aſſi para que ſe tenga alguna noticia diremos algo de ellos.

La Serie de Unidades $1+1+1+1$ &c. ſe llama *Serie de Numeros Figurados del primer orden.* La Serie que ſe forma por la continua addicion de los Numeros Figurados

del	1r. orden	ſe llama *Serie de Numeros Figurados* del	2°. orden
	2°. orden		3r. orden
	3r. orden		4°. orden
	4°. orden		5°. orden
	5°. orden		6°. orden
	6°. orden		7°. orden
	&c.		&c.

Aſſi

Assi los Numeros Figurados

del { 1r. orden, 2°. orden, 3r. orden, 4°. orden, 5°. orden, &c. } son { 1.1.1.1.1 &c. ; 1.2.3.4.5 &c. ; 1.3.6.10.15 &c. ; 1.4.10.20.35 &c. ; 1.5.15.35.70 &c. ; &c. }

251 Cada Numero Figurado pues del *segundo, tercero, quarto orden, &c.* se forma por la addicion de todos los Numeros, que en el orden precedente hai, comenzando desde el principio hasta el que corresponde directamente sobre él. Assi el tercer Numero del *tercer orden* de Numeros Figurados es $6 = 1+2+3$, que son los que corresponden en en el *orden segundo*, el quarto Numero Figurado del *quinto orden* es $35 = 1+4+10+20$, que le corresponden en el *quarto orden*.

De ahí se ve, que *cada Numero Figurado* (excepto los del primer orden) *es una suma de todos los que hasta él le corresponden en el orden antecedente*, cuya suma por consiguiente está *figurada*, y representada en él, que por esso tal vez toman la denominacion de Numeros *Figurados*; de donde lo mismo será encontrar un Numero determinado de algun orden, que encontrar la suma de la Serie de los que hasta él se encuentran en el orden precedente.

Sea n la distancia de cada termino al del principio de su respectivo orden, que siempre es 1, ò el numero de los terminos del orden precedente, por cuya addicion se forma. Haciendo reflexion sobre la Tabla precedente, se dexa ver, que $n =$ à la suma de la Serie de los terminos del *primer orden*, por consiguiente tambien $= n$ termino del *segundo orden*, esto es, al 2°, 3°, 4° termino. Mas la suma de la Serie del *segundo orden* de Numeros Figurados es la suma de la Serie de los Numeros Naturales $1 + 2 + 3 + 4 \ldots + n = \frac{n \times n+1}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$, segun el num. 237, que por consiguiente es tambien $= n$ termino del *tercer orden.*

252 Si en esta expression de la suma de la Serie del segundo orden $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ substituimos succesivamente en lugar de n los terminos de la Serie de los Numeros Naturales 1, 2, 3, 4, &c. sus resultados serán los terminos del *tercer orden.* Assi substituyendo 1 por n, se reducirá $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ à ser $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, *primer termino*; substituyendo 2 por n, será $\frac{4}{2} + \frac{2}{2} = 3$, *segundo termino*; substituyendo 3, será $\frac{9}{2} + \frac{3}{2} = 6$, *tercer termino.* De suerte que substituyendo en lugar de n los terminos 1, 2, 3, 4, &c. los resultados serán los terminos del tercero $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, $\frac{4}{2}$

$\frac{4}{2}+\frac{2}{2}$, $\frac{9}{2}+\frac{3}{2}$, $\frac{16}{2}+\frac{4}{2}$, $\frac{25}{2}+\frac{5}{2}$, &c. que puestos en otra forma, nos darán estas dos Series

$$\frac{1+2+3+4+5+6\ldots+n}{2},$$

$$\frac{1+4+9+16+25+36\ldots+n^2}{2}.$$

Pero la primera por lo que diximos n.237, es $=\frac{n^2}{4}+\frac{n}{4}$, y la segunda por lo que diximos num. 238, es $=\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{4}+\frac{n}{12}$; luego la suma de ambas, que es la suma de la Serie de los Numeros Figurados del *tercer orden*, será $\frac{n^3}{6}+\frac{2n^2}{4}+\frac{n}{12}+\frac{n}{4}=\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}=\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}$, y siendo suma de la Serie de los Numeros Figurados del tercer orden, tendremos por consiguiente el n termino de la Serie del *quarto orden.*

253 Passando à la Serie de los Numeros Figurados del *quarto orden*, para encontrar sus terminos, tomemos la expression de la suma de la Serie de los del tercer orden $\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$, substituyendo en ella succesivamente los Numeros Naturales 1, 2, 3, 4, &c. los resultados serán los terminos del quarto orden,

y tendremos $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=1$, $\frac{8}{6}+\frac{4}{2}+\frac{2}{3}=4$, $\frac{27}{6}+\frac{9}{2}+\frac{3}{3}=10$, $\frac{64}{6}+\frac{16}{2}+\frac{4}{3}=20$, &c. De manera que formando una Serie de todos los divididos por 6, otra de todos los divididos por 2, otra de todos los divididos por 3, la Serie de los Numeros Figurados del quarto orden se resolverá en estas tres Series:

$$\frac{1+8+27+64+125+216\ldots+n^3}{6},$$

$$\frac{1+4+9+16+25+36\ldots+n^2}{2},$$

$$\frac{1+2+3+4+5+6\ldots+n}{3}.$$

La suma de la primera, por lo que diximos num. 239, será $\frac{n^4}{24}+\frac{n^3}{12}+\frac{n^2}{24}$; la suma de la segunda, por lo que diximos num. 238, será $\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{4}+\frac{n}{12}$; la suma de la tercera, por lo que diximos num. 237, será $\frac{n^2}{6}+\frac{n}{6}$; y la suma de todas ellas será $\frac{n^4}{24}+\frac{n^3}{4}+\frac{11n^2}{24}+\frac{n}{4}=\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}\times\frac{n+3}{4}$.

254 Atendiendo al modo, como de la suma de la Serie de los Numeros Figurados del primer orden, se forman los terminos del segundo, y se encuentra su suma; como de

de la ſuma de los terminos del ſegundo, ſe forman los terminos del tercer orden, y ſe encuentra ſu ſuma, &c. ſe ve como ſe ha de proſeguir para encontrar los terminos de qualquier orden figurado, y la ſuma de ſu Serie.

Pero como, ſi para encontrar cada termino de algun ſuperior orden figurado, y la ſuma de todos los terminos de ſu orden, ſe hubieſſe de proceder ſucceſſivamente encontrando primero los del *ſegundo*, los del *tercero*, *&c.* ſería un trabajo immenſo; del calculo hecho haſta aquí ſe puede ſacar una Regla general para encontrar immediatamente qualquier termino de qualquier orden figurado, y la ſuma de toda la Serie, llegue à quantos terminos quiera.

Para encontrar pues la Suma de la Serie de los Numeros Figurados de qualquier orden, formeſe un producto, cuyo primer factor ſea el numero de terminos (n) *de la tal Serie; el ſegundo, la Suma del miſmo numero mas* 1, *dividida por* 2, *es à ſaber* $\left(\frac{n+1}{2}\right)$; *el tercero, la Suma del miſmo numero mas* 2, *dividida por* 3, *procediendo aſſi ſucceſſivamente haſta llegar à un factor, cuyo diviſor ſea el numero que indica el orden de la tal Serie, el producto de tales factores es la Suma buſcada de la tal Serie de* Numeros Figurados.

La

La practica de esta Regla se ve en el Exemplo siguiente. Busquese la suma de la Serie de los Numeros Figurados del *quinto* orden, llegando hasta cinco terminos. Segun la Regla dada, por constar la Serie de 5 terminos, será $n = 5$, y por ser del quinto orden, será el divisor del ultimo factor $= 5$, y la suma será $n \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} \times \frac{n+4}{5} = 5 \times \frac{5+1}{2} \times \frac{5+2}{3} \times \frac{5+3}{4} \times \frac{5+4}{5} = 126$.

Como la suma de la Serie de los Numeros Figurados del orden antecedente es igual al Numero Figurado, que corresponde directamente baxo el ultimo en el orden siguiente; la Regla dada puede servir tambien para encontrar qualquier Numero Figurado de qualquier orden, encontrando la suma de la Serie del orden antecedente, llegando à tantos terminos, como indica el termino que buscamos, esto es, à 5, si es el quinto, à 6, si es el sexto, &c.

Busquese el valor del *quarto* termino de la Serie de Numeros Figurados del quinto orden; por ser el Numero Figurado que buscamos del *quinto* orden, y ser el quarto de este orden, se habrá de buscar la suma de la Serie del quarto orden, llegando à quatro terminos, y será $n \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} = 4 \times \frac{5}{2} \times 2 \times \frac{7}{4} = 35$.

CA-

CAPITULO XVIII.

De las Combinaciones.

255 EXplicado ya el modo de ſumar las Series de los Numeros Figurados, ſe ſigue faciliſſima la Reſolucion del famoſo Problema *de las Combinaciones, que ſe pueden hacer de qualquier numero determinado de coſas, ò letras ya tomadas de dos en dos, ya tomadas de tres en tres, de quatro en quatro, &c.* Y para mayor claridad, ya que las letras ſon capaces de ſignificar coſas, uſaremos eſpecialmente en eſte punto de ellas.

Sea pues la primera Combinacion, de que tratamos, *tomando las coſas de dos en dos*, que podremos llamar *Combinacion del ſegundo orden*, para aſſemejarla mas à los Numeros Figurados, preſupueſto, que la combinacion de la coſa conſigo miſma (ſi Combinacion ſe puede llamar) ſerá la del *primer orden*.

Eſto ſupuſto, ſignifique n el numero de coſas, que ſe deben combinar, ò letras a, b, c, d, *&c.* que ſe deben unir. Quando n el numero de coſas, que ſe deben combinar es ſolamente *dos*, a, b, es cierto, que ſolo puede haber *una* Combinacion ab; pero ſi n ſe aumenta de una Unidad, ò lo que es lo miſmo,

el

el numero de cosas, de que se ha de hacer la Combinacion de dos en dos, es *tres*, *a*, *b*, *c*, el numero de Combinaciones se aumenta de *dos* Unidades, es à saber del numero antecedente de cosas, *a*, *b*, pues *c* se podrá combinar con cada una de ellas, y el numero de Combinaciones de dos en dos, que de las tres letras se puede hacer, será $1 + 2$.

256 Ahora pues si n el numero de cosas se aumenta de una Unidad mas *a*, *b*, *c*, *d*, el numero de Combinaciones se aumenta de 3, supuesto que 3 es el numero de las letras, que preceden en la antecedente Combinacion, y *d* se podrá juntar con cada una de ellas, por consiguiente el numero de Combinaciones de *dos en dos*, que de estas letras *a*, *b*, *c*, *d* se pueden hacer se expressará por $1 + 2 + 3$, y discurriendo de la misma suerte se verá, que el numero de Combinaciones de dos en dos, que se pueden hacer de cinco cosas, se expressará por $1 + 2 + 3 + 4$, de seis por $1 + 2 + 3 + 4 + 5$, por consiguiente el numero de Combinaciones de n cosas, ò letras será la suma de esta Serie $1 + 2 + 3 + 4 + 5 \ldots (n - 1)$. Pero esta es una Serie de Numeros Figurados del segundo orden, llegando à $n - 1$ terminos, cuya suma por lo que diximos num. 254, es $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} = \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$; *luego la suma de las Combinaciones del segundo orden* (ò de dos en dos)

dos) *que de* n *cosas se pueden hacer, es la suma de la Serie de los Numeros Figurados del segundo orden, llegando à* n — 1 *terminos*; y se exprimirá por esta Formula $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$.

Sean las cosas que se hayan de combinar 25, será $n = 25$, y el numero de Combinaciones del segundo orden, que con ellas se podrán hacer será $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} = 25 \times \frac{24}{2} = 300$.

Hayanse de hacer las Combinaciones de las cosas de tres en tres, que podremos llamar Combinaciones del tercer orden, siendo n *el numero de cosas, que se deben combinar.*

257 Es cierto, que si $n = 3$, ò hai solamente tres cosas para combinar, *a, b, c*, solo se podrá hacer una Combinacion (1). Si *n* se aumenta de una Unidad, ò el numero de cosas que se deben combinar es 4, *a, b, c, d*, el numero de Combinaciones se aumentará de 3 (= 1 + 2), supuesto que *d* se podrá juntar con cada Binario, que de *a, b, c* se puede hacer, que son tres, por lo que diximos antes, y assi será ya el numero de Combinaciones del tercer orden 1 + 3. Si *n* se aumenta de una Unidad mas, ò son cinco las cosas que se deben combinar, *a, b, c, d, e*, el numero de Combinationes se aumentará de 6 mas (= 1 + 2 + 3), pues son 6 los Binarios, que de las quatro precedentes letras se pueden hacer, à los quales

les *e* ſe puede juntar, y aſſi el numero de las Combinaciones ſerá $1+3+6$. *En que repareſe, que los terminos que exprimen las Combinaciones ſon tres*, $1+3+6$, *y que las coſas que ſe combinan ſon* 5, *y que* $3=5-2$.

De la miſma ſuerte ſe verá proſiguiendo, que el numero de Combinaciones del tercer orden, que ſe pueden formar de *n* coſas, ſerá $1+3+6+10\ldots n-2$. Pero eſta es una Serie de Numeros Figurados del tercer orden, llegando à terminos $n-2$, cuya ſuma, por lo que diximos num.254, es $\frac{n-2}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n}{3}=\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}$; *luego la ſuma de las Combinaciones del tercer orden* (ò de tres en tres) *que de* n *coſas ſe pueden hacer, es la ſuma de la Serie de los Numeros Figurados del tercer orden, llegando à* $n-2$ *terminos, y ſe exprimirá por eſta Formula* $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}$.

Sean 32 las coſas, cuyas Combinaciones *de tres en tres* ſe buſcan, ſerá $n=32$, y el numero de Combinaciones $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}=32\times\frac{31}{2}\times\frac{30}{3}=4960$.

258 Aſſimiſmo proſiguiendo ſe verá, que el numero de Combinaciones del *quarto orden* (ò de quatro en quatro) que de *n* coſas ſe pueden formar, es la ſuma de la Serie de los

los Numeros Figurados del quarto orden $1+4+10+20+35\ldots n-3=\frac{n-3}{1}\times\frac{n-2}{2}\times\frac{n-1}{3}\times\frac{n}{4}=\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}$. Y en general el numero de Combinaciones de qualquier orden imita à la ſuma de la Serie de Numeros Figurados de el miſmo orden, llegando à tantos terminos, como es el numero n de coſas que ſe combinan, diſminuido de tantas Unidades como indica el orden precedente; eſto es para el ſegundo orden llegan à $n-1$ terminos, para el tercero à $n-2$, para el quarto à $n-3$, &c. por neceſſitar de dos, de tres, de quatro coſas reſpectivamente para la primera, ò ſimple Combinacion.

259 De lo qual ſe puede en general decir, que el numero de Combinaciones *de dos en dos*, *de tres en tres*, *de quatro en quatro*, que de un numero n de coſas ſe puede hacer, es $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}$, *&c.* llegando à tantos factores, quanto es el numero de coſas, que en cada una de eſtas Combinaciones entran. Y aſſi en las Combinaciones *de dos en dos*, el numero de las Combinaciones ſerá el producto de los dos primeros factores, en las *de tres en tres* ſerá el producto de los tres primeros factores, &c.

Todo eſte Calculo ſe puede reſumir en eſta Re-

Regla general, para encontrar qualquier numero de Combinaciones de qualquier orden determinado, que de un numero determinado de cosas se puede hacer.

Regla. *Tomese el numero de cosas* n, *y formese un producto, cuyo primer factor sea* $\frac{n}{1}$, *el segundo el numero de cosas menos una, dividida esta diferencia por* 2, *es à saber* $\left(\frac{n-1}{2}\right)$, *el tercero el numero de cosas menos* 2, *dividida esta diferencia por* 3, *es à saber* $\left(\frac{n-2}{3}\right)$, *el quarto el numero de cosas menos* 3, *dividida esta diferencia por* 4, *y es* $\left(\frac{n-3}{4}\right)$, *prosiguiendo assi hasta llegar à un factor, cuyo divisor exprima el numero de cosas, que deben entrar en la particular Combinacion. Este producto exprimirá el numero de Combinaciones de aquel genero, que del numero dado de cosas se puede hacer.*

260 Esta Regla se ve practicada en este Exemplo. Quantas Combinaciones del *quarto orden*, ò de quatro en quatro se podrán hacer de 100 Soldados. Será $n = 100$, y como en cada Combinacion simple hai 4 Soldados, habrà de llegar el producto hasta quatro factores, y será $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} = 100$

$\times \frac{99}{2} \times \frac{98}{3} \times \frac{97}{4} = 3921225$, numero de las Combinaciones de *quatro en quatro*, que de 100 Soldados ſe pueden hacer.

Haſta aquí hemos tratado de la Algebra como independiente de la Geometría, pues en realidad lo es. Pero para ſacar el immenſo fruto, que ſe puede, de eſta ſublime Ciencia, y aplicar ſus Principios Generales à puntos particulares, nos reſervamos eſte trabajo para otro lugar mas oportuno, donde aplicaremos los Principios de la Algebra à los Problemas Geometricos, procurando diſponer el eſpiritu para el ſublime Methodo de las Fluxiones, que algunos llaman *Calculo Diferencial*, è *Integral*, de que trataremos à ſu tiempo, ſegun vieſſemos, que fueſſen recibidos del Publico eſtos nueſtros primeros trabajos, emprendidos para contribuir en algo al bien, y luſtre de nueſtra Eſpaña.

FIN.

INDICE

INDICE

DE LOS CAPITULOS, Y ARTICULOS contenidos en eſte ſegundo Tomo.

PROEMIO, *Pag.* 1
CAP. I. Equaciones en Comun, 3
CAP. II. Equaciones Simples, 10
CAP. III. Tres Methodos para hacer deſaparecer algunas incognitas de la Equacion, 15
Primer Methodo, 16
Segundo Methodo, 18
Tercer Methodo, 20
CAP. IV. Equaciones del Segundo Grado, 23
CAP. V. Reſolucion de algunos Problemas, 26
ART. I. Reſuelvenſe algunos Problemas del Primer Grado, 30
ART. II. Reſuelvenſe algunos Problemas del Segundo Grado, 40
Problemas Simples del Segundo Grado, *ibid.*
Problemas Afectos del Segundo Grado, 46
ART. III. Reſuelvenſe algunos Problemas de varias incognitas, 50
CAP. VI. Formacion de las Equaciones Superiores, 64
CAP. VII. De los Signos de las Raices, y Coeficientes de los Terminos de las Equaciones, 70
CAP. VIII. De la Transformacion de las Equaciones, y fines de eſta Transformacion, 79
Primer Genero de Transformaciones, *ibid.*
Segundo Genero de Transformaciones, 80
Tercer Genero de Transformaciones, 82
Quarto Genero de Transformaciones, 90
CAP. IX. Del Methodo para encontrar las Raices de una Equacion, quando hai dos, ò mas iguales entre sí, reduciendola à Grado inferior, 95
CAP. X. De los Limites de las Raices de las Equaciones, 102
ART. I. De los Limites de las Raices en Comun. *ibid.*
Otra Regla para encontrar el Limite ſuperior de una Equacion, ſi tiene algun Coeficiente negativo, 107
Methodos Comunes para encontrar los Limites de las Raices, 109
ART. II. De los Limites entre cada Raiz en particular, 112
CAP. XI. Methodos para encontrar las Raices Commenſurables de qualquier Equacion, 123
ART. I. Primer Methodo para encontrar las Raices Commenſurables de una Equacion, 127
ART. II. Segundo Methodo para encontrar las Raices de las Equaciones Superiores, 133